# Physique Statistique I*

Corentin Arvor
*Faculté de Physique et Ingénierie, Université de Strasbourg*

Notes pour la séance de tutorat du 16 Octobre 2025 sur la Physique Statistique de niveau L3.
Sujet(s) abordé(s) : ensemble microcanonique.

## RAPPEL DE COURS

Définition physique statistique : théorie dont le but est d'expliquer les propriétés d'un système macroscopique à partir de ses constituants microscopiques.

### Ensemble microcanonique : Définition

L'ensemble microcanonique est l'ensemble des micro-états $\vec{x}$ (positions $(x, y, z)$ et impulsions $(p_x,\, p_y,\, p_z)$) compatibles avec les conditions extérieures $(E, V, N) =$ fixés :

$$\{\vec{x} \in \Gamma(E, V, N) \mid H(\vec{x}) = E = \text{fixe},\ V = \text{fixe},\ N = \text{fixe}\}\,, \tag{1}$$

où $\Gamma$ est l'espace des phases à 6N dimensions. On voit donc que l'ensemble microcanonique est entièrement déterminé par $U$, $V$ et $N$ (E = U quand $N \to +\infty$ la limite thermodynamique).

### Propriétés importantes

$\rho(E)$ est appelée la densité d'état avec une énergie $E$. $\Omega(E)$ est la fonction de partition microcanonique, elle compte le nombre d'états entre les énergies $E$ et $E + \delta E$. Il est donc clair que $\Omega(E) = \rho(E)dE$.

Postulat fondamental : Pour un système isolé à l'équilibre, tous les micro-états accessibles ont la même probabilité :

$$P^{MC}(\vec{x}) = \begin{cases} \frac{1}{\Omega(E)}, & \text{si } E \leq H(\vec{x}) \leq E + \delta E \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}\,. \tag{2}$$

### Quelques relations et formules à connaître

Identités thermodynamiques :

$$dE = TdS - PdV + \mu dN,$$

$$dS = \frac{1}{T}dE + \frac{P}{T}dV - \frac{\mu}{T}dN,$$

Conséquences :

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_{V,N},\ \frac{P}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{E,N},\ \frac{\mu}{T} = -\left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{E,V}.$$

L'entropie peut être définie par la formule de Boltzmann :

$$S = k_B \ln(\Omega),$$

où $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$ J.K$^{-1}$. Cette formule provient de la théorie de l'information et plus précisément de l'entropie de Shannon $S(P_l) = -k_b \sum_l P_l \ln(P_l)$. Cette dernière mesure la perte d'information dans le système.

---

* Organisé par le Pôle Tutorat de la Faculté de Physique et Ingénierie, Université de Strasbourg.

## EXERCICE 1 : GAZ PARFAIT MONOATOMIQUE

Un gaz parfait de $N$ particules classiques monoatomiques, chacune de masse $m$, se trouve dans un volume $V$. Dans l'ensemble microcanonique, la densité d'états $\rho(E,V,N)$ du gaz est donnée par :

$$\rho(E,V,N) = \frac{3N}{2}\frac{V^N}{N!}\left(\frac{2\pi m}{h^2}\right)^{3N/2}\frac{E^{3N/2-1}}{\Gamma(3N/2-1)},$$

où $E$ est l'énergie interne du gaz, $h$ est la constante de Planck et $\Gamma(x)$ la fonction gamma d'Euler.

**Question 1: Quelle est la signification physique de $\rho(E,V,N)$ ? Quelle est la relation entre $\rho(E,V,N)$ et la fonction de partition microcanonique $\Omega(E,V,N)$ ?**

$\rho(E,V,N)$ représente le nombre de micro-états d'énergie égale à $E$. $\Omega$ est le nombre d'états compris entre $E$ et $E+\mathrm{d}E$ donc, par définition :

$$\Omega(E) = \rho(E,V,N)\mathrm{d}E.$$

**Question 2: Rappeler la formule de Boltzmann pour l'entropie thermodynamique $S(E,V,N)$ en termes de $\Omega(E,V,N)$.**

Par définition de l'entropie thermodynamique :

$$S(E,V,N) = k_B\ln(\Omega(E)).$$

**Question 3: Montrer qu'à la limite thermodynamique $S(E,V,N)$ du gaz s'écrit :**

$$S(E,V,N) = Nk_B\left[\frac{5}{2}+\ln\left(\frac{V}{N\lambda_T^3}\right)\right],$$

**où $\lambda_T = \lambda_T(E)$ est une longueur d'onde dont on précisera l'expression.**

$$\begin{aligned}
S &= k_B\ln\left(\rho(E)dE\right)\\
&= k_B\ln\left(\frac{3N}{2}\frac{V^N}{N!}\left(\frac{2\pi m}{h^2}\right)^{3N/2}\frac{E^{3N/2-1}\mathrm{d}E}{\Gamma(3N/2+1)}\right)\\
&= k_B\left(\ln\left(\frac{3N}{2\Gamma(3N/2+1)N!}\right)+N\ln\left(V\left(\frac{2\pi mE}{h^2}\right)^{3/2}\right)+\ln\left(\frac{\mathrm{d}E}{E}\right)\right)
\end{aligned}$$

Or à la limite thermodynamique, $N\to\infty$, donc :

- $N!\approx N^Ne^{-N}\sqrt{2\pi N}$
- $\ln(N!)\approx N\ln(N)-N+\ln\left(\sqrt{2\pi N}\right)$
- $\Gamma(3N/2+1)\approx\left(\frac{3N}{2\mathrm{e}}\right)^{3N/2}\sqrt{3\pi N}$
- $\ln(\Gamma(3N/2+1))\approx\frac{3N}{2}\ln\left(\frac{3N}{2}\right)-\frac{3N}{2}+\ln\left(\sqrt{3\pi N}\right)$

Ainsi :

$$\ln\left(\frac{3N}{2\Gamma(3N/2+1)N!}\right)\approx-\frac{3N}{2}\ln\left(\frac{3N}{2}\right)-N\ln(N)+\frac{5N}{2}+\ln\left(\frac{3}{2\sqrt{6}\pi}\right),$$

où l'on peut négliger la constante devant les autres termes. De même, $\ln(\mathrm{d}E/E)$ est négligeable devant les autres termes quand $N \to \infty$. L'entropie devient :

$$\begin{aligned}
S &\approx k_B \left( -\frac{3N}{2} \ln\left(\frac{3N}{2}\right) - N\ln(N) + \frac{5N}{2} + N\ln\left( V \left(\frac{2\pi m E}{h^2}\right)^{3/2} \right) \right) \\
&= N k_B \left( \frac{5}{2} + \ln\left( \frac{V}{N} \left(\frac{4\pi m E}{3Nh^2}\right)^{3/2} \right) \right).
\end{aligned}$$

On vérifie que S est extensif et on identifie $\lambda_T = \sqrt{\dfrac{3Nh^2}{4\pi m E}}$.

**Question 4: Déterminer la température $T(E,V,N)$ du gaz. En déduire l'expression de $\lambda_T$ en fonction de $T$.**

On sait que $\dfrac{1}{T} = \dfrac{\partial S}{\partial E}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T} &= \frac{\partial}{\partial E}\left[ N k_B \left( \frac{5}{2} + \ln\left(\frac{V}{N\lambda_T^3}\right)\right)\right] \\
&= N k_B \frac{\partial}{\partial E}\left[ \ln\left(\frac{V}{N\lambda_T^3}\right)\right] \\
&= N k_B \frac{1}{\frac{V}{N\lambda_T^3}} \frac{\partial}{\partial E}\left[\frac{V}{N\lambda_T^3}\right] \\
&= N k_B \lambda_T^3 \frac{\partial}{\partial E}\left[\frac{1}{\lambda_T^3}\right] \\
&= N k_B \lambda_T^3 \left[\frac{3}{2E\lambda_T^3}\right] \\
&= \frac{3Nk_B}{2E}
\end{aligned}$$

On obtient donc $E = \dfrac{3}{2} N k_B T$, l'énergie d'un gaz parfait monoatomique. On a donc :

$$\begin{aligned}
\lambda_T &= \sqrt{\frac{3Nh^2}{4\pi m E}} \\
&= \sqrt{\frac{h^2}{2\pi m k_B T}}.
\end{aligned}$$

## EXERCICE 2 : CRISTAL PARAMAGNÉTIQUE PARFAIT

Nous considérons un système de $N$ moments magnétiques $\{\vec{\mu}_i\}_{i=1,\dots,N}$, chacun fixé à un noeud d'un cristal. Les moments magnétiques sont indépendants et placés dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B_0\hat{z}$ avec $\hat{z}$ le vecteur unitaire suivant l'axe des $z$. L'énergie interne du système s'écrit :

$$H = -B_0 \sum_{i=1}^{N} \mu_{iz}, \tag{3}$$

où $\mu_{iz}$ est la composant de $\vec{\mu}_i$ suivant $\hat{z}$, de module $|\mu_{iz}| = \mu$. À l'équilibre, $n_+$ des $N$ moments sont orientés dans le sens de $\hat{z}$ et $n_- = N - n_+$ dans le sens inverse.

**Question 1: Dans l'ensemble microcanonique, l'énergie interne est fixée à la valeur $E$. Exprimer $E$ en fonction de $n_+$ et $n_-$. Montrer que $-N\mu B_0 \leq E \leq +N\mu B_0$.**

On sait que $H = -B_0 \sum_{i=1}^{N} \mu_{iz}$

$$E = -n_+ B_0 \mu + n_- B_0 \mu$$

Les valeurs de $n_+$ et $n_-$ sont bornées, $n_+$ et $n_- \in [0, N]$, les deux cas extrêmes sont $n_+ = N, n_- = 0$ qui correspond à $-N\mu B_0$ et $n_+ = 0, n_- = N$ qui correspond à $N\mu B_0$. Ainsi :

$$-N\mu B_0 \leq E \leq N\mu B_0$$

**Question 2: Déterminer $n_+$ et $n_-$ en fonction de $E$ et $N$.**

On a :

$$\begin{cases} n_+ + n_- = N \\ n_- - n_+ = \dfrac{E}{\mu B_0} \end{cases} \implies \begin{cases} 2n_- = N + \dfrac{E}{\mu B_0} \implies n_- = \dfrac{N}{2} + \dfrac{E}{2\mu B_0} \\ 2n_+ = N - \dfrac{E}{\mu B_0} \implies n_+ = \dfrac{N}{2} - \dfrac{E}{2\mu B_0} \end{cases}$$

**Question 3: Pour ce système, comment la fonction de partition microcanonique $\Omega(E, N)$ s'écrit-elle ?**

On cherche à compter combien de possibilités existent pour mettre $n_+$ moments magnétiques suivant $\hat{z}$, ainsi il restera forcément $n_-$ moments magnétiques dans le sens inverse. Donc :

$$\Omega(E) = \binom{N}{n_+} = \frac{N!}{(N - n_+)!n_+!} = \frac{N!}{n_-!n_+!}.$$

**Question 4: En déduire qu'à la limite thermodynamique l'entropie du système $S(E, N)$ se met sous la forme :**

$$S(E,N) = Nk_B \left[\ln(2) - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{E}{N\mu B_0}\right)\ln\!\left(1 + \frac{E}{N\mu B_0}\right) - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{E}{N\mu B_0}\right)\ln\!\left(1 - \frac{E}{N\mu B_0}\right)\right].$$

$$\begin{aligned} S &= k_B \ln(\Omega) \\ &= k_B \left(\ln(N!) - \ln(n_+!) - \ln(n_-!)\right) \\ &= k_B \left(N\ln(N) - n_+ \ln(n_+) - n_- \ln(n_-)\right) \\ &= Nk_B \left(\ln(N) - \left(\frac{1}{2} - \frac{E}{2B_0\mu N}\right)\ln\left(\frac{N}{2} - \frac{E}{2B_0\mu}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{E}{2B_0\mu N}\right)\ln\left(\frac{N}{2} + \frac{E}{2B_0\mu}\right)\right) \\ &= Nk_B \left(\ln(2) - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{E}{B_0\mu N}\right)\ln\left(1 - \frac{E}{B_0\mu N}\right) - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{E}{B_0\mu N}\right)\ln\left(1 + \frac{E}{B_0\mu N}\right)\right) \end{aligned}$$

**Question 5: Déterminer la température $T(E, N)$.**

On a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} &= \frac{\partial S}{\partial E} \\ &= \frac{\partial}{\partial E}\left[Nk_B \left(\ln(2) - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{E}{B_0\mu N}\right)\ln\left(1 - \frac{E}{B_0\mu N}\right) - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{E}{B_0\mu N}\right)\ln\left(1 + \frac{E}{B_0\mu N}\right)\right)\right] \\ &= -\frac{Nk_B}{2}\frac{\partial}{\partial E}\left[\left(1 - \frac{E}{B_0\mu N}\right)\ln\left(1 - \frac{E}{B_0\mu N}\right) + \left(1 + \frac{E}{B_0\mu N}\right)\ln\left(1 + \frac{E}{B_0\mu N}\right)\right]. \end{aligned}$$

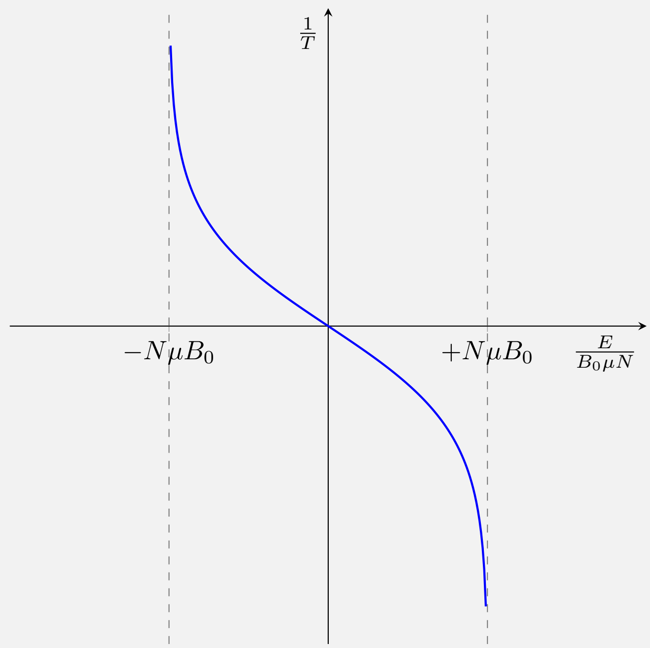
Or :

$$\frac{\partial}{\partial E}\left(1 \pm \frac{E}{B_0\mu N}\right)\ln\left(1 \pm \frac{E}{B_0\mu N}\right) = \pm\frac{1}{B_0\mu N}\left(1+\ln\left(1 \pm \frac{E}{B_0\mu N}\right)\right).$$

Finalement :

$$\frac{1}{T} = \frac{k_B}{2B_0\mu}\ln\left(\frac{1-\frac{E}{B_0\mu N}}{1+\frac{E}{B_0\mu N}}\right)$$

**Question 6: À $N$ fixé, tracer $1/T$ en fonction de $E$. La température est-elle toujours positive ?**




**LICENCE**