

Aucun document n'est autorisé. Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice I – Équation de SCHRÖDINGER (12 pts)

Dans la suite on considère un système conservatif décrivant une particule ponctuelle (sans degrés de liberté internes), c'est-à-dire que son hamiltonien $\hat{H}$ ne dépend pas explicitement du temps, et un espace des positions à une dimension.

1. Notations en mécanique quantique.

- (a) Que représente la notation $|\psi(t)\rangle$, en mécanique quantique ? (1 pt)
- (b) Donner le lien entre $\hat{x}$ et $|x\rangle$, sachant que x décrit la position de la particule ? (1 pt)
- (c) Donner le lien entre $|\psi(t)\rangle$ et la fonction d'onde $\psi : (t, x) \mapsto \psi(t, x)$. (1 pt)

2. Quelle interprétation peut-on donner à $|\psi(t, x)|^2$? (1 pt)

3. Qu'entend-on par "normalisation de la fonction d'onde" ? (1 pt)

4. Qu'appelle-t-on une "observable" en mécanique quantique ? (1 pt)

5. Quel résultat peut-on trouver lors de la mesure d'une grandeur physique sur un système donné ? (1 pt)

6. Rappeler l'expression de l'équation de SCHRÖDINGER en formalisme de DIRAC. Idem en formalisme de fonction d'onde. (1 pt)

7. On cherche une solution de l'équation de SCHRÖDINGER (en formalisme de fonction d'onde) sous la forme $f(t)g(x)$. Démontrer l'expression de $f(t)$. (1 pt) - 0,5

On suppose désormais que le système se trouve dans l'état $|\psi(t)\rangle = e^{-iEt/\hbar} |\varphi\rangle$ avec $\hat{H} |\varphi\rangle = E |\varphi\rangle$.

8. Calculer la valeur moyenne de $\hat{H}$ dans l'état $|\psi(t)\rangle$, noté $\langle \hat{H} \rangle$. (1 pt) - 0,5

9. De même, calculer $\langle \hat{H}^2 \rangle$ et en déduire l'écart quadratique moyen $\Delta \hat{H} = \sqrt{\langle \hat{H}^2 \rangle - \langle \hat{H} \rangle^2}$ de $\hat{H}$ dans l'état $|\psi(t)\rangle$. (1 pt) - 0,5

10. Déterminer l'expression de $\langle \psi(t) | \psi(t) \rangle$ et commenter le résultat obtenu. (1 pt)

Exercice II – Probabilités de mesures (8 pts)

Dans un espace vectoriel $\mathcal{E}$ de dimension 3, on considère deux opérateurs $\hat{S}_z$ et $\hat{S}_x$, représentés dans la base orthonormée $\mathcal{B} = \{|+\rangle, |0\rangle, |-\rangle\}$ par les matrices

$$(S_z) = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (S_x) = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans cette même base, les vecteurs propres de $\hat{S}_x$ sont représentés par

$$u = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad w = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. On considère les vecteurs propres de $\hat{S}_x$.

- (a) Vérifier que l'ensemble des vecteurs $\{|u\rangle, |v\rangle, |w\rangle\}$ forme également une base orthonormée de l'espace $\mathcal{E}$. (1 pt)
- (b) Déterminer les valeurs propres λ_u, λ_v , et λ_w , correspondant respectivement aux vecteurs u, v et w . (1 pt)

2. Le système se trouve maintenant dans un état $|\psi\rangle$, dont l'expression, dans la base $\mathcal{B}$ est donnée sous la forme

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3i \end{pmatrix}$$

- (a) Calculer la norme de l'état $|\psi\rangle$. (1 pt)
- (b) Calculer la valeur moyenne $\langle \hat{S}_z \rangle_\psi$ pour l'état $|\psi\rangle$ considéré. (1 pt)
- (c) Calculer la valeur moyenne $\langle \hat{S}_x \rangle_\psi$ pour l'état $|\psi\rangle$ considéré. (1 pt)
- (d) Calculer les probabilités qu'une mesure de $\hat{S}_z$ donne comme résultat les valeurs $+\hbar, 0$ ou $-\hbar$ dans l'état $|\psi\rangle$. (1 pt)
- (e) Calculer la somme des probabilités trouvées à la question précédente et commenter le résultat obtenu. (1 pt)
- (f) Calculer la probabilité qu'une mesure de $\hat{S}_x$ donne comme résultat la valeur $+\hbar$ dans l'état $|\psi\rangle$. (1 pt)

$$P_{+\hbar} = |\langle + | \psi \rangle|^2 = \frac{1}{14}$$

3

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3i \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3i \end{pmatrix}$$

$\langle -\hbar | \psi \rangle$

2

- 3,5

- 16,5

15,5

- 12,5