L3

Module: Mécanique Quantique

Examen, épreuve de janvier 2026, durée 2 h

Les trois exercices sont indépendants.

1 Moment cinétique (questions de cours) [6pts]

Sachant que $\hat{\vec{L}} \equiv \hat{\vec{R}} \times \hat{\vec{P}}$ et $\hat{\vec{L}}^2 \equiv \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$, démontrer les relations fondamentales suivantes: $[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar \hat{L}_z$ et $[\hat{L}_z, \hat{\vec{L}}^2] = 0$.

2 Formule de Baker-Campbell-Hausdorff [6pts]

1. Montrer qu'un opérateur arbitraire $\hat{F}$ peut-être mis sous la forme $\hat{F} = \hat{A} + i\hat{B}$, où $\hat{A}$ et $\hat{B}$ sont des opérateurs *hermitiens*. Dans quel cas l'opérateur $\hat{F}^2$ est-il hermitien ?
2. On définit l'opérateur $\hat{F}(\lambda) = e^{\lambda \hat{A}} \hat{B} e^{-\lambda \hat{A}}$ où $\hat{A}$ et $\hat{B}$ sont des opérateurs arbitraires. Calculer $\frac{d\hat{F}}{d\lambda}$ puis $\frac{d^2\hat{F}}{d\lambda^2}$.
3. En utilisant le développement en série de Taylor $\hat{F}(\lambda) = \hat{F}(\lambda_0) + \frac{1}{1!}(\lambda - \lambda_0) \left.\frac{d\hat{F}}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_0} + \frac{1}{2!}(\lambda - \lambda_0)^2 \left.\frac{d^2\hat{F}}{d\lambda^2}\right|_{\lambda=\lambda_0} + \ldots$ démontrer la relation importante suivante: $e^{\hat{A}} \hat{B} e^{-\hat{A}} = \hat{B} + \frac{1}{1!}[\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \ldots$.

3 Représentation en coordonnées sphériques [8pts]

Supposons qu'un électron soit décrit par la fonction d'onde en représentation sphérique

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \left(e^{i\varphi} \sin(\theta) + \cos(\theta)\right) g(r) \, ,$$

avec $\int_0^\infty |g(r)|^2 r^2 dr = 1$. Rappel: $Y_{00}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$, $Y_{10}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos(\theta)$, $Y_{1\pm1}(\theta, \varphi) = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin(\theta) e^{\pm i\varphi}$.

1. Dans cet état, quelles sont les valeurs possibles pour la mesure de $\hat{L}_z$ (composante z du moment angulaire orbital) ?
2. Quelles sont les probabilités d'obtenir les différentes valeurs de la question (1) ?
3. Quelle est la valeur moyenne de l'observable $\hat{L}_z$ dans cet état ?