

LICENCE 3 DE PHYSIQUE — ANNÉE 2025/2026
 ÉLECTROMAGNÉTISME DE LA MATIÈRE
 CC n° 2

Durée 2h. 4 pages. Les parties I et II sont à rendre sur des feuilles séparées.

I. BARREAUX AIMANTÉS ET GÉOMÉTRIE CYLINDRIQUE

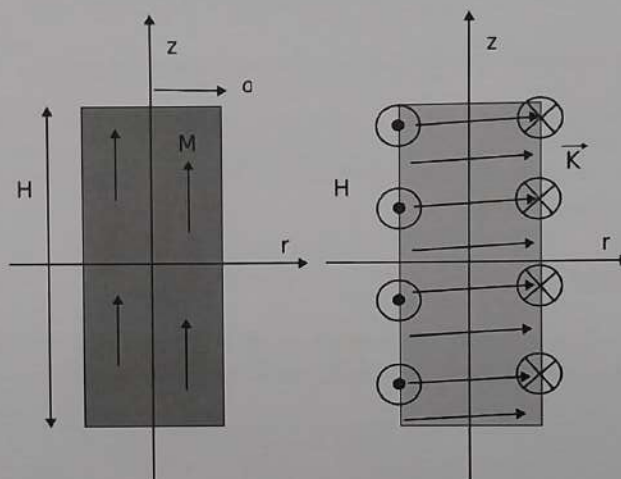


FIGURE 1: Barreau cylindrique aimanté, et sa représentation équivalente en courants surfaciques.

I-A Barreau cylindrique aimanté.

Un barreau de forme cylindrique à base circulaire, de rayon a et hauteur H , est le siège d'une aimantation rémanente et permanente de densité d'aimantation volumique $\vec{M}$ (en A/m) orientée parallèlement à l'axe vertical du cylindre définissant l'axe de coordonnées z (Figure 1). L'espace est repéré par un repère de coordonnées cartésiennes (x, y, z) ou de façon équivalente de coordonnées cylindriques (r, φ, z) (voir aussi Figure 2 ci-dessous).

1. Calculer le moment magnétique total $\vec{M}$ que porte le barreau aimanté. En quelle unité du système international (SI) ce moment s'exprime-t-il ?
2. Répondre brièvement aux questions suivantes :
 - (a) Comment se comporte le barreau, libre de son mouvement, si on applique un champ magnétique uniforme suivant la direction Ox ?
 - (b) Comment se comporte le barreau, libre de son mouvement, si on le place dans un gradient de champ magnétique $\vec{\nabla}||\vec{B}||$?
 - (c) Citer au moins un dispositif pratique utilisant un tel barreau aimanté de petite taille ? Expliquer le mode de fonctionnement de ce dispositif.

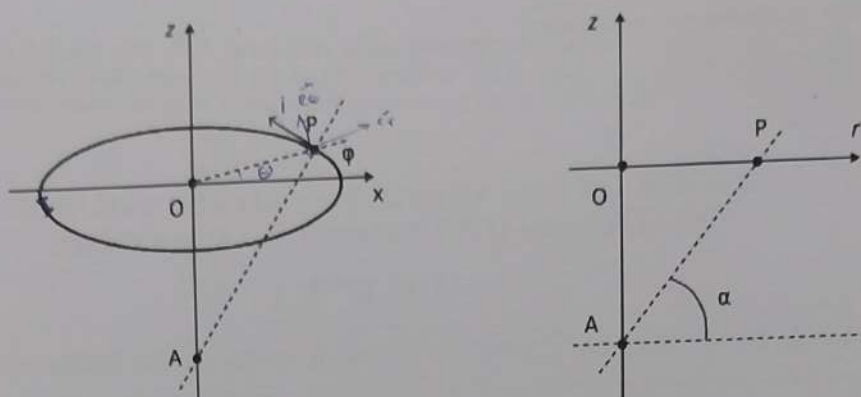


FIGURE 2: Spire circulaire, et géométrie de l'exercice

3. Le champ magnétique créé par un corps uniformément aimanté est équivalent à celui créé par une distribution surfacique de courant $\vec{K} = \vec{M} \times \hat{n}$, où $\hat{n}$ est le vecteur unitaire normal en tout point à ce corps. Donner l'expression et l'unité SI de la densité de courant surfacique $\vec{K}$ dans le cas du barreau aimanté.

I-B Champ créé par une spire parcourue par un courant d'intensité i .

Une boucle circulaire de courant de rayon a parcourue par un courant i . Elle est placée pour les besoins de l'exercice en $z = 0$, dans le plan (O, x, y) (voir Figure 2). Un point A, de hauteur z se situe sur l'axe de la spire. Un point P est repéré par un angle φ parcouru la boucle de courant. On introduit de plus, pour la suite, un angle α entre le plan horizontal et le vecteur $\vec{AP}$.

4. Justifier par un argument de symétrie que le champ magnétique $\vec{B}_1(A)$ au point A est porté par le vecteur unitaire $\hat{e}_z$.
5. En utilisant la loi de Biot et Savart, qui exprime qu'un petit élément de longueur $d\ell$ de circuit au voisinage de P produit une petite contribution au champ $\vec{B}_1$, au point A, donnée par :

$$d\vec{B}_1(A) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \times \vec{PA}}{PA^3}, \quad (1)$$

donner l'expression du champ $\vec{B}_1$ en tout point A de hauteur z .

6. Exprimer les trois grandeurs $\cos(\alpha)$, $\sin(\alpha)$ et $\tan(\alpha)$ en fonction de a et z .
7. Réexprimer le champ $\vec{B}_1$ en fonction de a et α (z ne doit plus apparaître dans l'expression de ce champ).
Indication : le résultat fait apparaître le terme $\cos^3(\alpha)$.

I-C Champ créé par un solénoïde fini en un point de son axe..

Un solénoïde de hauteur totale H , centrée sur l'origine O du repère, et comprend une densité de spires par unité de longueur N . Une tranche de hauteur dZ peut donc être assimilée à une spire parcourue par un courant $N i dZ$ (Figure 3).

8. Additionner les contributions de toutes les tranches dZ pour obtenir le champ $\vec{B}(z)$ en un point d'altitude z quelconque.

Indications :

(i) on exprimera la différence $Z - z$ en fonction du rayon a et de l'angle α .

(ii) on pourra utiliser la relation $d \tan(\alpha) = \frac{d\alpha}{\cos^2(\alpha)}$

Montrer que la composante z du champ B est donnée par :

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 Ni}{2} \left(\sin(\alpha_1) - \sin(\alpha_2) \right) \quad (2)$$

où l'angle α_1 est l'angle du haut du cylindre vu par A et α_2 celui du bas du cylindre (Figure 3).

9. Déduire l'expression du champ magnétique à l'intérieur du solénoïde infini. Retrouver cette expression en utilisant le théorème d'Ampère.

I-D Champ démagnétisant d'un cylindre de hauteur finie.

10. Faire la connexion entre la densité surfacique de courant $\vec{K}$, l'aimantation $\vec{M}$ et le produit Ni .
11. En déduire le champ magnétique B_m créé par la seule aimantation M sur l'axe de ce cylindre.
12. Écrire la relation reliant H_m , M et B_m à l'intérieur et à l'extérieur du barreau cylindrique aimanté.
13. Montrer que pour un cylindre aimanté de hauteur infinie, $H_m \rightarrow 0$. Déduire la valeur de B_m ?
14. Donner les champs B_m et H_m pour un disque aimanté d'épaisseur très petite devant a ($H \ll a$). Justifier qu'en l'absence d'une anisotropie magnéto-cristalline forte, il est difficile d'aimanter un film mince perpendiculairement à son plan.

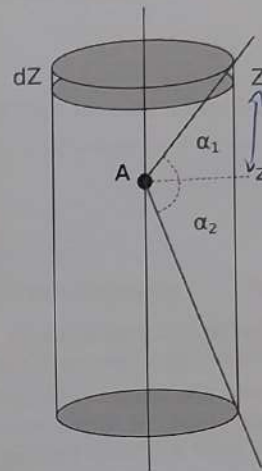
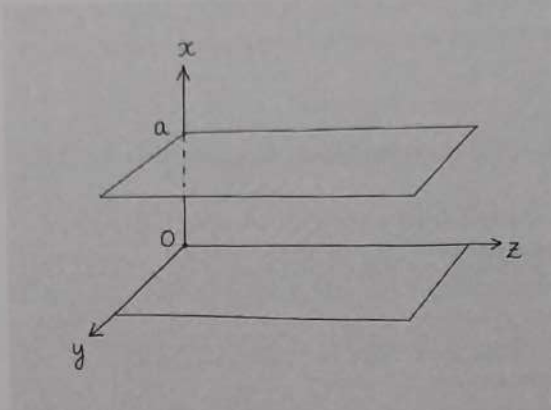


Figure 3

II. PROPAGATION DANS UN GUIDE D'ONDE PLAN

On considère l'espace vide situé entre deux plans parallèles modélisant les surfaces, mises en vis-à-vis, de deux conducteurs parfaits. Relativement à un repère cartésien $(O, \hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z)$, ces deux plans sont définis par $x = 0$ et $x = a > 0$ respectivement, les deux conducteurs parfaits occupant l'un la région $x \leq 0$, l'autre la région $x \geq a$.



1. À partir des équations de Maxwell, écrire l'équation de propagation d'un champ électrique $\vec{E}$ dans le vide (aucune hypothèse sur l'expression mathématique de ce champ n'est encore faite à ce stade de l'exercice).

On souhaite déterminer sous quelles conditions une onde électromagnétique monochromatique de pulsation ω peut se propager dans cet espace entre les deux conducteurs, le long de l'axe $z'z$ et en particulier une onde *transverse électrique*, dont le champ électrique est de la forme :

$$\vec{E}(x, y, z, t) = E(x) \hat{e}_y \cos(kz - \omega t), \quad (3)$$

où l'amplitude $E(x)$ une fonction de x à déterminer, et k le vecteur d'onde de l'onde électromagnétique.

2. Compte tenu de la géométrie du problème, justifier sans calcul la nécessité d'introduire une dépendance en x dans l'expression de $\vec{E}$.
3. En argumentant la réponse, déterminer la valeur doit prendre $E(x)$ pour $x = 0$ et $x = a$.
4. Montrer que $E(x)$ est solution de l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 E(x)}{dx^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) E(x) = 0. \quad (4)$$

On considère dans la suite de l'exercice que $(\omega/c)^2 - k^2 > 0$.

5. Déterminer la relation à satisfaire entre k , ω et Ω pour que :

$$E(x) = E_0 \sin(\Omega x), \quad (5)$$

soit solution de l'équation (4).

6. Quelle est la plus petite valeur de Ω pour laquelle l'expression (5) est compatible avec les conditions aux limites évoquées à la question 3 ?
7. En déduire des deux questions précédentes l'expression, en fonction de a , de la pulsation de coupure ω_c en dessous de laquelle la propagation d'une onde dans le guide d'onde n'est plus possible ?
8. Déterminer, en notation réelle, l'expression du champ magnétique $\vec{B}(x, y, z, t)$ associé à :

$$\vec{E}(x, y, z, t) = E_0 \hat{e}_y \sin(\Omega x) \cos(kz - \omega t). \quad (6)$$

Comment l'orientation de $\vec{B}$ est-elle modifiée par rapport à une propagation dans le vide ? Montrer que $\vec{B}$ redevient transverse pour la longueur d'onde λ est très petite devant a ($\lambda \ll a$).

9. Calculer le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$.

Montrer que, bien que celui-ci présente une composante transverse, le flux moyen d'énergie se fait uniquement selon la direction de propagation z .

FIN DE L'ÉNONCÉ