

Mécanique Analytique

PARTIEL 1

Tous les documents, calculatrices, téléphones portables sont interdits. L'épreuve dure une heure. Toute sortie avant 1/2 heure est interdite. Toute sortie après 1/2 heure est définitive.

Équations de Lagrange

Soit un système mécanique de Lagrangien

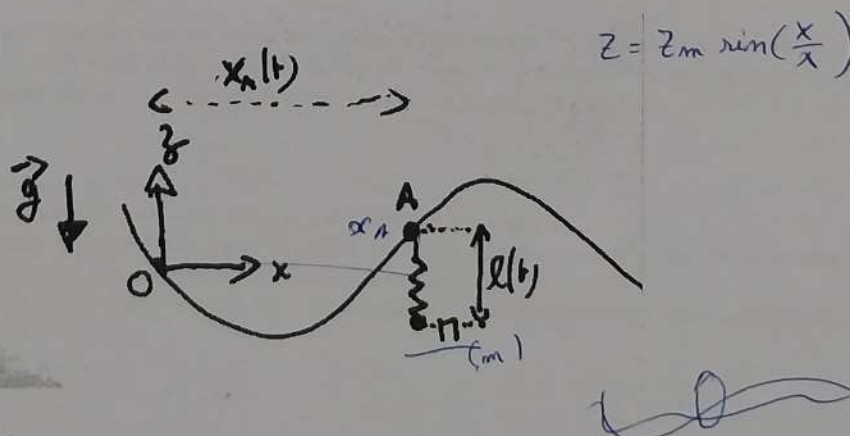
$$\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2\omega^2} \dot{q}^2 \cos(\omega t) + \frac{1}{\omega} \dot{q} \sin(\omega t) - \frac{1}{2} q^2 \sin(\omega t)$$

1. Écrire l'équation de Lagrange de ce système. On écrira cette dernière sous la forme $\ddot{q} + A\dot{q} + Bq + C = 0$ en précisant les expressions de A , B et C . On ne demande pas de résoudre l'équation différentielle obtenue.
2. Rappeler la définition de la fonction énergie $h(q, \dot{q}, t)$ associée à un lagrangien $L(q, \dot{q}, t)$. Calculer $h(q, \dot{q}, t)$ explicitement dans le cas présent (par la méthode de votre choix, que vous citerez ou justifierez). h est-elle conservée sur la trajectoire (justifier) ?
3. On considère le Lagrangien

$$\mathcal{L}_0(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2\omega^2} \dot{q}^2 \cos(\omega t) - q \cos(\omega t) - \frac{q^2}{2} \sin(\omega t)$$

Reprendre la question 1. avec ce Lagrangien. Quel commentaire pouvez-vous faire sur le résultat et pourquoi a-t-on ce résultat surprenant ?

Écriture d'un Lagrangien



Dans le dessin ci-dessus :

- Le point M est une masse m ponctuelle.
- Le point A est un anneau (sans masse) coulissant sur un fil de fer.

- Ce fil de fer est fixe, contenu dans le plan xOz et d'équation $z = z_m \sin(x/\lambda)$ où z_m et λ sont deux constantes.

- Le ressort reliant A et M a une masse négligeable, une longueur à vide ℓ_0 et une raideur k . Son énergie potentielle est $E_{\text{ressort}} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$ quand sa longueur est ℓ .

- Le ressort est contraint à rester sur l'axe vertical et toutes les liaisons sont sans frottements et holonomes.

1. Citer les 4 contraintes présentes dans ce système mécanique. Pourquoi cela laisse-t-il deux degrés de liberté indépendants ?

2. On prend comme degrés de liberté indépendants x_A et ℓ , la position en x du point A (et du point M) et ℓ la longueur du ressort.

(a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{OM}$ en fonction de x_A et ℓ uniquement, dans la base e_x, e_z représentée à gauche du dessin.

(b) Exprimer le vecteur vitesse $\vec{v}$ du point M en fonction des variables déjà citées et de leur dérivée temporelle. En déduire l'expression de l'énergie cinétique T .

(c) Exprimer V , l'énergie potentielle de ce système. On veillera au fait que V est constitué de deux termes d'origines physiques distinctes.

3. En déduire le lagrangien $L(x_A, \ell, \dot{x}_A, \dot{\ell})$ du système. Écrire les deux équations de Lagrange associées.

4. Montrer que la fonction énergie $h(x_A, \ell, \dot{x}_A, \dot{\ell})$ est bien l'énergie mécanique du système.

5. Comment est modifié L si l'anneau de jonction en A a une masse m_A ?

Équivalents ou pas ?

On considère le Lagrangien $L_{\alpha, \beta}(q, \dot{q}, t) = \cos(\alpha t + \beta) \left[\frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{1}{2}q^2 \right]$, où α et β sont deux constantes. Répondez aux deux questions ci-dessous en justifiant vos réponses !

1. Peut-on dire que les Lagrangiens $L_{0, \beta}$ sont tous équivalents, $\forall \beta \in \mathbb{R}$? [Par "équivalents" on veut dire "conduisent à la même équation du mouvement"]

2. Peut-on dire que les Lagrangiens $L_{\alpha, 0}$ sont tous équivalents, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$?