Université de Strasbourg

Magistère - L_2

Mécanique Analytique

PARTIEL 2

Tous les documents, calculatrices, téléphones portables sont interdits. L'épreuve dure une heure. Toute sortie avant 1/2 heure est interdite. Toute sortie après 1/2 heure est définitive.

Hamiltoniens et Transformations Canoniques

À rendre sur une feuille séparée

Soit le Lagrangien

$$L(q, \dot{q}) = \lambda\sqrt{\dot{q}^2 + q}$$

où λ est une constante.

1. Calculer la fonction énergie du système $h(q, \dot{q})$. Est-ce une quantité constante sur la trajectoire physique $q(t)$?
2. Exprimer $\dot{q}$ comme une fonction de (q, p) si $p = \partial L/\partial\dot{q}$.
3. En déduire le Hamiltonien $H(q, p)$.
4. Écrire les deux équations de Hamilton (mais ne pas tenter de les intégrer).
5. On veut essayer de simplifier $H(q, p)$ par une transformation canonique. Pour ce faire, on cherche une transformation telle que $q = P^2/(\lambda^2 - p^2)$, en utilisant une transformation $F_4(p, P)$, dont on rappelle les équations définissant la transformation :

$$q = -\frac{\partial F_4}{\partial p} \qquad Q = +\frac{\partial F_4}{\partial P}$$

   Exhiber une $F_4(p, P)$ qui peut faire l'affaire. (On rappelle que $\dfrac{1}{\lambda^2 - p^2} = \dfrac{1}{2\lambda}\left[\dfrac{1}{\lambda - p} + \dfrac{1}{\lambda + p}\right]$)
6. Quel est le nouvel Hamiltonien $K = K(Q, P)$? Écrire et intégrer les nouvelles équations de Hamilton.
7. * Comment remonter de ces $Q(t), P(t)$ aux $(q(t), p(t))$ des coordonnées de départ ? (justifier).

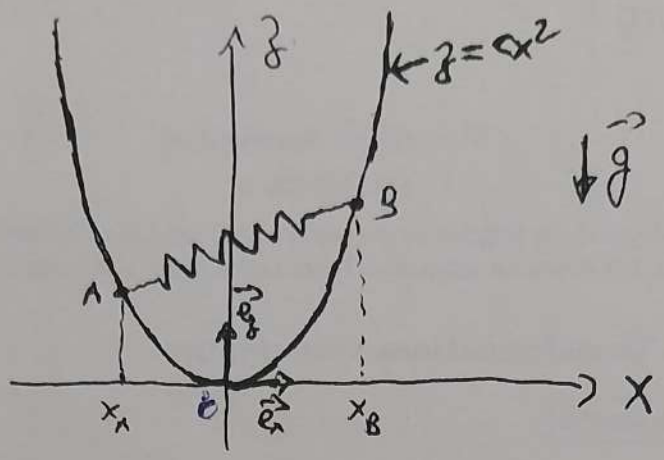
Écriture d'un Lagrangien

À rendre sur une feuille séparée

Dans le dessin ci-dessous :

- La courbe dessinée est une parabole d'équation $z = cx^2$ dans le plan $y = 0$, faite en fil de fer.
- Les points A et B sont des masses ponctuelles m pouvant coulisser sans frottement sur la parabole de fil de fer.
- Les masses en A et B sont reliées par un ressort sans masse, de raideur k et longueur à vide ℓ_0, dont on rappelle l'énergie potentielle pour une extension ℓ: $E_{\text{ressort}}(\ell) = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$.

- Les masses en A et B sont sensibles au champ de gravité $\vec{g} = -g\vec{e}_z$.



1. On va décrire ce système par x_A et x_B. Écrire le vecteur $\overrightarrow{OA}$ comme un vecteur colonne à deux composantes dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_z)$, en fonction de x_A et c seulement. De même avec $\overrightarrow{OB}$ en fonction de x_B et c seulement.
2. En déduire les vecteurs vitesses $\vec{v}_A$ et $\vec{v}_B$, puis l'énergie cinétique T du système.
3. Écrire l'énergie potentielle $V(x_A, x_B)$ totale du système.
4. En déduire le Lagrangien $L(x_A, \dot{x}_A, x_B, \dot{x}_B)$ (*on ne demande pas les équations de Lagrange*). En déduire la fonction énergie h du système en utilisant la méthode vue en TD seulement.

Transformations Canoniques et Crochets de Poisson

À rendre sur une feuille séparée

1. Pour quelle valeur de μ, la transformation suivante est-elle canonique ?

$$Q = q\sqrt{e^{-p} - e^{-2p}}, \qquad P = \mu\sqrt{e^{p} - 1}$$

2. Redémontrer la formule vue en cours : Si $A(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t)$ est un fonction sur l'espace des phases (et dépend éventuellement du temps), alors $\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \{A, H\} + \dfrac{\partial A}{\partial t}$, où $\{\ldots\}$ désigne le crochet de Poisson.
3. Calculer le crochet de Poisson $\{q^2 + p, p^3 + q\}$. Le résultat est-il (i) un nombre, (ii) une fonction du temps, (iii) une fonction sur l'espace des phases ?
4. On considère le Hamiltonien $H(p, q, t) = \sqrt{1 - q^2\cos^2(\omega t)}$ où ω est une constante. Pour simplifier ce Hamiltonien, on considère le changement de variables canonique défini par la fonction $F_2(q, P) = P\sqrt{1 - q^2\cos^2(\omega t)}$ (et les équations $\partial_q F_2 = p$ et $\partial_P F_2 = Q$). Montrer que le nouvel Hamiltonien va être donné par l'équation

$$\mathcal{K}(Q, P, t) = Q + P\left(\frac{1}{Q} - Q\right)\omega\tan(\omega t)$$