

L3 MPA-MAGISTERE

Année 2025-2026

Analyse Complexe

Durée : 1h30

Un grand soin devra être apporté à la rédaction qui devra être précise et sobre.

Exercice I - Conditions de Cauchy-Riemann

1. Soient $u(x, y)$ et $v(x, y)$ deux fonctions de $\mathbb{R}^2$. On considère une fonction uniforme et continue de la variable complexe $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ définie sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$. Démontrer qu'une condition nécessaire pour que $f(z)$ soit holomorphe (dérivable) en tout $z \in \Omega$ est que les dérivées partielles premières de $u(x, y)$ et $v(x, y)$ vérifient les *conditions de Cauchy-Riemann*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (2)$$

2. Etudier la dérivabilité des fonctions $f(z) = z$ et $g(z) = z^*$, où z^* désigne le complexe conjugué de z .
3. Dans le cours, nous avons vu que les conditions de Cauchy-Riemann sont équivalentes à la relation

$$\frac{\partial f}{\partial z^*} = 0. \quad (3)$$

Etudier la dérivabilité de la fonction

$$f(z, z^*) = 0, \quad z = 0, \quad (4)$$

$$= \frac{z^{*2}}{z}, \quad z \neq 0. \quad (5)$$

Exercice II - Connexité

- ~ 1. Que signifie l'expression *Domaine simplement connexe*?
- ~ 2. Comment peut-on obtenir un domaine simplement connexe à partir du domaine hachuré représenté sur la figure ci-dessous ?

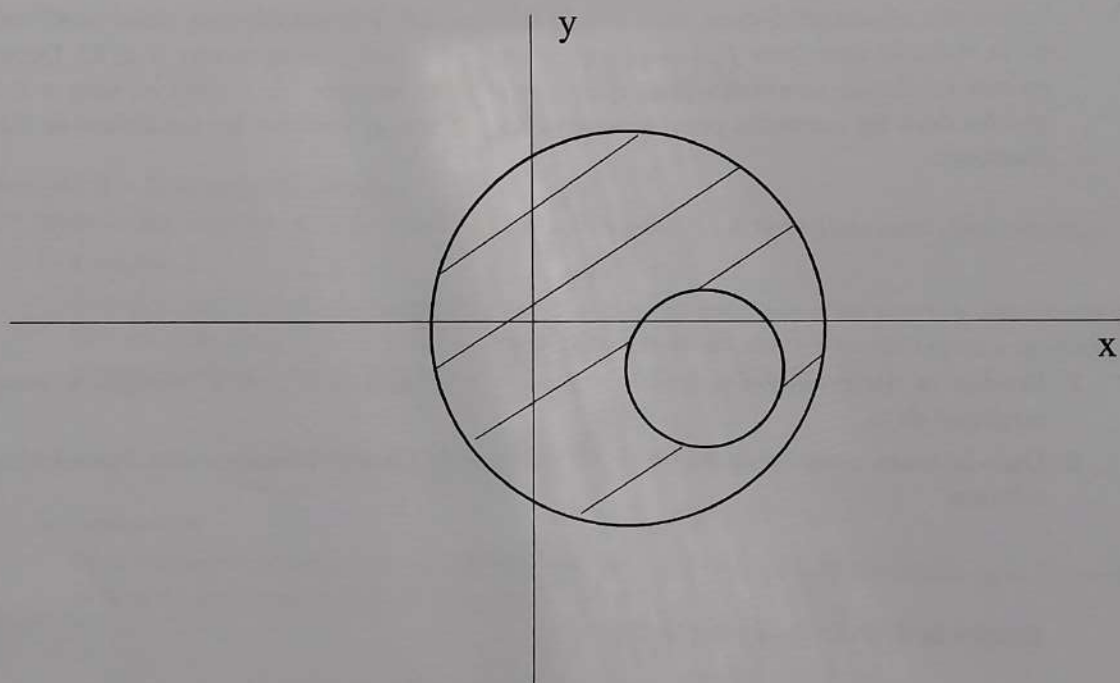


FIGURE 1 – Domaine dans le plan complexe considéré dans l'exercice II.

Exercice III - Une intégrale

Dans cet exercice, on pourra utiliser les rappels à la fin du document sans démonstration. A noter que si l'utilisation des lemmes de Jordan sans démonstration est autorisée, il est toutefois nécessaire de justifier leur utilisation.

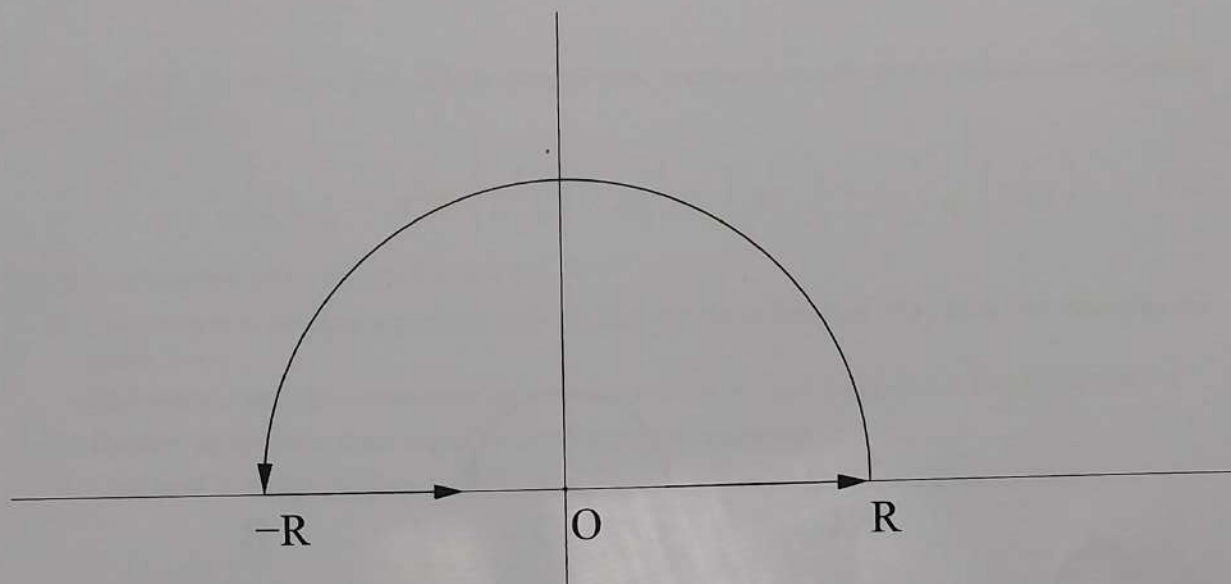


FIGURE 2 - Représentation du contour orienté et fermé Γ de l'exercice III. Il est composé d'un demi-cercle centré à l'origine et de rayon R , et d'un segment de droite $[-R, R]$.

On désire calculer l'intégrale suivante

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(mx)}{x^2 + 1} dx, \quad (6)$$

où $x \in \mathbb{R}$ et $m > 0$, en utilisant la théorie de l'intégration dans le plan complexe.

1. Etudier la ou les singularités de la fonction

$$f(z) = \frac{e^{imz}}{z^2 + 1}. \quad (7)$$

Quel est leur type ?

2. En utilisant le théorème des résidus que vaut l'intégrale

$$\oint_{\Gamma} \frac{e^{imz}}{z^2 + 1} dz \quad (8)$$

sur le contour Γ représenté à la Figure 2 ?

3. Comment peut-on obtenir l'intégrale I_1 à partir de ce résultat ?
4. Calculer I_1 .

Exercice IV - Une autre intégrale

Dans cet exercice, on pourra utiliser les rappels à la fin du document sans démonstration. A noter que si l'utilisation des lemmes de Jordan sans démonstration est autorisée, il est toutefois nécessaire de justifier leur utilisation.

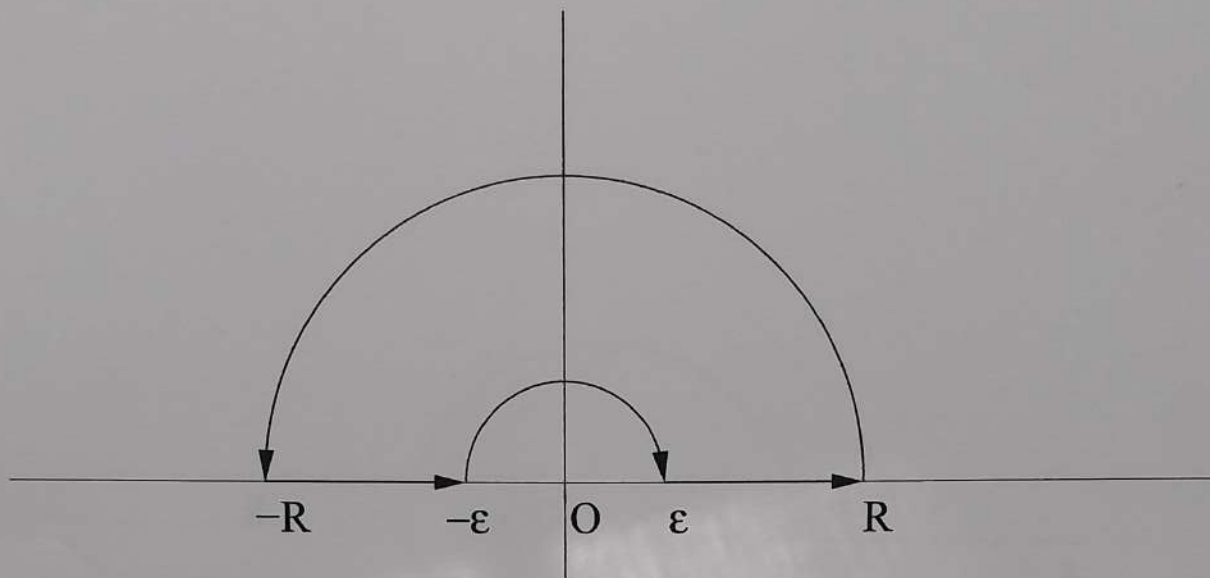


FIGURE 3 – Représentation du contour orienté et fermé Γ de l'exercice IV. Il est composé des deux demi-cercles centrés à l'origine et des deux segments de droite $[-R, -\epsilon] \cup [\epsilon, R]$.

On désire calculer l'intégrale suivante

$$I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx, \quad (9)$$

où $x \in \mathbb{R}$, en utilisant la théorie de l'intégration dans le plan complexe.

1. Etudier la ou les singularités de la fonction

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z}. \quad (10)$$

Quel est leur type ?

2. En utilisant le théorème des résidus que vaut l'intégrale

$$\oint_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{z} dz \quad (11)$$

sur le contour fermé et orienté Γ représenté à la Figure 3 ?

3. Comment peut-on obtenir l'intégrale I_2 à partir de ce résultat ?
4. Calculer I_2 . Dans cet exercice, on admettra sans démonstration que l'intégrale sur le cercle extérieur est nulle lorsque R tend vers l'infini.

Exercice V - Série de Laurent

On considère la fonction $f(z)$ définie dans le plan complexe et son développement en éléments simples (à admettre),

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)(z^2+1)} = \frac{1}{a^2+1} \left(\frac{1}{z-a} \right) + \frac{1}{2i(i+a)} \left(\frac{1}{z+i} \right) + \frac{1}{2i(i-a)} \left(\frac{1}{z-i} \right), \quad (12)$$

où a est un nombre réel vérifiant $0 < a < 1$.

1. Déterminer le développement en série de Laurent de la fonction $f(z)$ dans un voisinage du point $z = a$.

Indication : on peut commencer en écrivant $z+i = z-a+a+i$ et $z-i = z-a+a-i$.

2. Préciser le domaine dans lequel ce développement converge.
3. Que vaut le résidu de f en $z = a$?

Compléments

Rappel 1 - Calcul du résidu d'un pôle simple

Soit m un entier naturel strictement positif ($m > 0$), un nombre complexe z_0 est appelé un pôle d'ordre m d'une fonction $f(z)$ s'il existe une fonction holomorphe $g(z)$ telle que

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}, \quad (13)$$

vérifiant

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z) = g(z_0) \neq 0. \quad (14)$$

Le résidu $\text{Res}(f, z_0)$ est la valeur du coefficient de $\frac{1}{z - z_0}$ de la série de Laurent de $f(z)$ définie au voisinage de z_0 . Si z_0 est un pôle simple ($m = 1$), le résidu se calcule avec la formule

$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z). \quad (15)$$

Rappel 2 - Lemmes de Jordan

On rappelle les deux lemmes de Jordan suivants. Ils peuvent être utilisés sans démonstration.

1. Lemme 1

Soit $f(z)$ une fonction uniforme holomorphe dans le voisinage d'un point z_0 que l'on suppose être un pôle simple. Soit γ un arc de cercle orienté de centre z_0 , de rayon ϵ et d'angle au centre α orienté comme γ , alors

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma} f(z) dz = i\alpha \text{Res}(f, z_0) \quad (16)$$

2. Lemme 2

Sans connaître la nature de z_0 , si $f(z)$ est continue sur un cercle de centre z_0 et de rayon R et si pour tout z appartenant à ce cercle, on a

$$\lim_{R \rightarrow \infty} |(z - z_0) f(z)| = 0, \quad (17)$$

alors

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f(z) dz = 0, \quad (18)$$

où γ un arc de cercle quelconque du cercle de centre z_0 et de rayon R .

Rappel 3 - Fonction sinus et cosinus complexe

Les fonctions *sinus complexe* et *cosinus complexe* sont définies par

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad (19)$$

où e^z est la *fonction exponentielle complexe* définie par la série entière

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}. \quad (20)$$

Son rayon de convergence est égal à l'infini. La fonction e^z est donc holomorphe $\forall z \in \mathbb{C}$.