Faculté de physique et ingénierie
Université de Strasbourg

Licence de Physique 3ème année – Contrôle continu
Épreuve de physique statistique – 23 octobre 2025
Aucun document n'est autorisé.
Durée de l'épreuve : 1 heure et demi

Système d'oscillateurs harmoniques classiques dans l'ensemble microcanonique

Nous considérons un système de N particules classiques, chacune de masse m. Les particules sont discernables parce que chaque particule est localisée à un nœud d'un cristal, autour duquel la particule oscille de façon harmonique. Les N oscillateurs sont indépendants les uns des autres et ont tous la même pulsation ω. Le cristal est tridimensionnel et non déformable.

La fonction de Hamilton (H) du système s'écrit :

$$H = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\vec{p}_i^{\,2}}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \vec{r}_i^{\,2} \right] , \quad \vec{p}_i = (p_{ix}, p_{iy}, p_{iz}) , \quad \vec{r}_i = (r_{ix}, r_{iy}, r_{iz}) , \tag{1}$$

où $p_{i\alpha}$ et $r_{i\alpha}$ sont respectivement la composante α de la quantité de mouvement de la particule i et la composante α du déplacement de la particule i autour de son nœud de cristal.

Nous traitons ce système de N oscillateurs dans l'ensemble microcanonique.

Questions préparatoires

1. Quelles sont les valeurs possibles pour $p_{i\alpha}$ et $r_{i\alpha}$?
2. Comment le micro-état $\vec{x}$ du système est-il défini ?
3. Comment l'ensemble microcanonique est-il défini, sachant que l'énergie E du système, son volume V et N sont constants ?
4. Le fait que l'énergie soit constante signifie que $H(\vec{x}) = E$, à une incertitude δE près. En vous aidant d'un changement de variable approprié ($r_{i\alpha} \to q_{i\alpha}$), montrer que la contrainte $H(\vec{x}) = E$ se met sous la forme :
$$\sum_{i=1}^{N} \left[\vec{p}_i^{\,2} + \vec{q}_i^{\,2} \right] = R^2 , \tag{2}$$
où R est une constante que l'on précisera en termes de m et de E.
5. L'Eq. (2) peut être interprétée comme l'équation d'une sphère dans un espace euclidien à d dimensions. Quelle est la dimension de cet espace ?

Entropie

6. Soit $\Phi(E, V, N)$ le nombre de micro-états dont l'énergie est inférieure ou égale à E. En vous aidant du formulaire, montrer que
$$\Phi(E, V, N) = \frac{1}{(3N)!} \left(\frac{E}{\hbar\omega} \right)^{3N} , \tag{3}$$
où $\hbar = h/2\pi$ et h est la constante de Planck.
7. Calculer la densité d'états $\rho(E, V, N)$ de ce système d'oscillateurs harmoniques.

nb d'état avec une énergie $\leq E$ dans le système

8. Rappeler le lien entre $\rho(E, V, N)$ et la fonction de partition $\Omega(E, V, N)$ de l'ensemble microcanonique.

9. Quelle est la signification physique de $\Omega(E, V, N)$?

10. Rappeler le lien entre $\Omega(E, V, N)$ et l'entropie $S(E, V, N)$.

11. Calculer $S(E, V, N)$ à la limite thermodynamique.

Propriétés thermodynamiques

12. Calculer la température microcanonique T. En déduire l'énergie interne U ($= E$ à la limite thermodynamique) du système.

13. Calculer la pression microcanonique p.

    Vous constaterez que p a une valeur numérique précise qui est indépendante des paramètres physiques du système. Comment peut-on justifier ce résultat physiquement ?

14. Calculer le potentiel chimique microcanonique μ. Exprimer μ en fonction de T.

Formulaire

1. Volume d'une sphère de rayon R dans un espace euclidien à d dimensions

$$V_d(R) = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2+1)} R^d \,,$$

   où $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ est la fonction gamma.

2. Formule de Stirling

$$\text{Pour } x \text{ entier : } \quad \Gamma(x+1) = x! \,. \quad \text{Pour } x \gg 1 : \quad x! \simeq x^x \, \mathrm{e}^{-x} \sqrt{2\pi x} \,.$$