Faculté de physique et ingénierie
Université de Strasbourg

Licence de Physique 3ème année – Contrôle continu
Épreuve de physique statistique – 8 janvier 2026
Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices sont autorisées.
Durée de l'épreuve : 2 heures

Exercice I – Gaz parfait classique

Nous considérons un système de N particules classiques, chacune de masse m et sans interaction, dont la fonction de Hamilton est donnée par :

$$H(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\vec{p}_i^{\,2}}{2m} ,$$

où $\vec{x}$ est le micro-état du système et $\vec{p}_i$ l'impulsion de la particule i.

1. Dans l'ensemble canonique, quelle expression relie la fonction de partition $Z(T,V,N)$ à H où T est la température et V le volume du système classique considéré ?

2. Montrer que

$$Z(T,V,N) = \frac{1}{N!} z(T,V)^N ,$$

où $z(T,V)$ est la fonction de partition d'une particule qu'on précisera en termes de V et T.

3. Nous notons $\Xi(T,V,\mu)$ la grande fonction de partition, i.e. la fonction de partition dans l'ensemble grand-canonique, où μ est le potentiel chimique. Quelle est la relation entre $\Xi(T,V,\mu)$ et $Z(T,V,N)$?

4. Utiliser cette relation pour montrer que (k_B est la constante de Boltzmann)

$$\Xi(T,V,\mu) = \exp\left[e^{\beta\mu} z(T,V)\right] \qquad \text{avec } \beta = 1/k_B T .$$

5. Quelle est la relation entre le grand potentiel $\Omega(T,V,\mu)$ et $\Xi(T,V,\mu)$?

6. En utilisant que $\Omega(T,V,\mu)$ est une quantité extensive, montrer que

$$\Omega(T,V,\mu) = -p(T,\mu)V , \tag{1}$$

où $p(T,\mu)$ est la pression du gaz.

7. En déduire $p(T,\mu)$ pour le gaz parfait classique.

8. On rappelle la relation thermodynamique entre le grand potentiel $\Omega(T,V,\mu)$ et le nombre de particules, $N(T,V,\mu)$, dans l'ensemble grand-canonique :

$$N(T,V,\mu) = -\left.\frac{\partial \Omega}{\partial \mu}\right|_{T,V} . \tag{2}$$

Calculer $N(T,V,\mu)$ pour le gaz parfait classique.

9. Montrer que les résultats précédents, obtenus dans l'ensemble grand-canonique, permettent de conclure que la pression obéit à l'équation d'état des gaz parfaits classiques.

Formulaire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad (a = \text{constant et} > 0) .$$

Exercice II – Gaz de fermions indépendants libres

Nous considérons un gaz de fermions indépendants libres, chacun de masse m et de spin $s = 1/2$, dans l'ensemble grand-canonique. En appliquant des conditions aux limites périodiques le vecteur d'onde $\vec{k}$ et l'énergie $\varepsilon_{\vec{k}}$ sont quantifiés ($\hbar = h/2\pi$ avec h la constante de Planck) :

$$\varepsilon_{\vec{k}} = \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m}, \qquad \vec{k} = \frac{2\pi}{V^{1/3}}\,\vec{n}, \quad \vec{n} = (n_x, n_y, n_z), \quad n_\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \quad (\alpha = x, y, z).$$

Pour ce gaz parfait de fermions, le grand potentiel $\Omega(T, V, \mu)$ s'écrit :

$$\Omega(T, V, \mu) = -2 k_\mathrm{B} T \sum_{\vec{k}} \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-\beta(\varepsilon_{\vec{k}} - \mu)}\right) \qquad \text{avec } \beta = 1/k_\mathrm{B} T .$$

1. À la limite thermodynamique ($V \to \infty$) :

   a) Montrer que la somme sur les vecteurs d'onde peut être remplacée par :

   $$\sum_{\vec{k}} \longrightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \int \mathrm{d}^3 k ,$$

   et exprimer cette intégrale en coordonnées sphériques dans l'espace des $\vec{k}$.

   b) Utiliser la relation ε et k pour effectuer le changement de variable $k \to \varepsilon$.

   c) En déduire que le grand potentiel peut s'écrire sous la forme :

   $$\Omega(T, V, \mu) = -k_\mathrm{B} T \int_0^\infty \mathrm{d}\varepsilon\, g(\varepsilon) \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-\beta(\varepsilon - \mu)}\right), \tag{3}$$

   où $g(\varepsilon)$ est la densité d'états du gaz dont on précisera la dépendance en ε ainsi que des constantes physiques intervenant.

2. À la limite thermodynamique, l'énergie interne $U(T, V, \mu)$ s'écrit :

   $$U(T, V, \mu) = \int_0^\infty \mathrm{d}\varepsilon\, \frac{\varepsilon g(\varepsilon)}{\mathrm{e}^{\beta(\varepsilon - \mu)} + 1} .$$

   Montrer que

   $$U(T, V, \mu) = B\Omega(T, V, \mu) ,$$

   où B est une constante qu'on précisera.

   Indication : effectuer une intégration par parties de l'Eq. (3) et utiliser $\ln(1 + x) \simeq x$ pour calculer la valeur du terme intégré $[\ldots]_0^\infty$.

3. Exprimer $p(T, \mu)$ en fonction de $U(T, V, \mu)$.

4. À basse température, le développement de Sommerfeld fournit le expression suivante pour l'énergie interne :

   $$U(T, V) = U_0 \left[1 + \frac{5\pi^2}{12}\left(\frac{T}{T_\mathrm{F}}\right)^2\right] + \mathcal{O}(T^4) ,$$

   où U_0 est l'énergie interne at $T = 0$ et T_F la température de Fermi.

   En déduire la pression à basse température.

5. Pour le gaz quantique de photons un calcul similaire à celui des fermions montre que $p(T) \propto T^4$.

   La pression du gaz parfait de photons tend donc vers zéro avec la température, alors que celle du gaz de fermions tend vers une valeur finie.

   Expliquer l'origine physique de cette différence.