

Licence Physique – 3ème année – Semestre 5
MÉTHODES MATHÉMATIQUES POUR LA PHYSIQUE
Contrôle Continu numéro 1

Aucun document n'est autorisé – Durée de l'épreuve : 1 heure
Le barème est donné à titre indicatif

Soit $\mathcal{B} = \{|u\rangle, |v\rangle\}$ une base de vecteurs orthonormés d'un espace de Hilbert de dimension 2, et soit $\hat{H}$ un opérateur tel que $\hat{H}|u\rangle = +|u\rangle$ et $\hat{H}|v\rangle = -|v\rangle$.

1. Rappeler la définition du produit scalaire hermitien. (1 pt)
2. Rappeler la définition de l'adjoint $\hat{O}^\dagger$ d'un opérateur linéaire $\hat{O}$. (1 pt)
3. Rappeler la définition d'un opérateur hermitique et d'un opérateur unitaire. (1 pt)
4. Rappeler, sans démonstration, les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Minkowski. (1 pt)
5. Montrer que $(|\phi\rangle\langle\psi|)^\dagger = |\psi\rangle\langle\phi|$. (1 pt)
6. Donner l'expression des matrices $(H)_\mathcal{B}$, $(H)_\mathcal{B}^2$, $(H)_\mathcal{B}^{-1}$ et $(H)_\mathcal{B}^\dagger$ dans la base $\mathcal{B}$. (1 pt)
7. Soient les opérateurs $\hat{A} = |u\rangle\langle u|$ et $\hat{B} = |v\rangle\langle v|$. Donner l'expression de $\hat{A}^\dagger$ et de $\hat{B}^\dagger$. (1 pt)
8. Calculer $\hat{A}\hat{B}$, $\hat{B}\hat{A}$, $\hat{A}^2$ et $\hat{B}^2$. (1 pt)
9. Donner l'expression des matrices $(A)_\mathcal{B}$ et $(B)_\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{B}$. (1 pt)
10. Donner l'expression des matrices $(A+B)_\mathcal{B}$ et $(A-B)_\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{B}$. (1 pt)
11. Les matrices $(A)_\mathcal{B}$, $(B)_\mathcal{B}$, $(A+B)_\mathcal{B}$ et $(A-B)_\mathcal{B}$ sont-elles inversibles? Si oui, donner la matrice inverse correspondante. (1 pt)
12. Soient les vecteurs $|\alpha\rangle = \cos\theta|u\rangle + e^{i\varphi}\sin\theta|v\rangle$ et $|\beta\rangle = \sin\theta|u\rangle - e^{i\varphi}\cos\theta|v\rangle$, où θ et φ sont deux réels donnés. Montrer que $\mathcal{B}' = \{|\alpha\rangle, |\beta\rangle\}$ forme également une base de vecteurs orthonormés de ce même espace. (1 pt)
13. Donner l'expression de la matrice $(H)_{\mathcal{B}'}$ dans la base $\mathcal{B}'$. (1 pt)
14. Soient les opérateurs $\hat{C} = |u\rangle\langle v|$ et $\hat{D} = |v\rangle\langle u|$. Calculer $\hat{C}\hat{D}$, $\hat{D}\hat{C}$, $\hat{C}^2$ et $\hat{D}^2$. (1 pt)
15. Calculer le commutateur $[\hat{C}, \hat{D}]$. (1 pt)
16. On rappelle que $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$, $\text{ch } x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$ et $\text{sh } x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$.
 - (a) Calculer $e^{\hat{C}}$ et $e^{\hat{D}}$. (2 pts)
 - (b) Montrer que l'on peut écrire $e^{(\hat{C}+\hat{D})} = a\mathbb{I} + b(\hat{C} + \hat{D})$ en précisant les valeurs de a et de b . (2 pts)
 - (c) Peut-on écrire $e^{\hat{C}}e^{\hat{D}} = e^{(\hat{C}+\hat{D})}$? (1 pt)

Licence Physique – 3ème année – Semestre 5
MÉTHODES MATHÉMATIQUES POUR LA PHYSIQUE
 Contrôle continu numéro 2

Aucune source documentaire n'est autorisée – Durée de l'épreuve : 1 heure

EXERCICE I : Distributions. (/5. pts)

Soit la fonction $f(x) = \ln(|x|)$

1. Représenter la fonction $f(x)$. (/0.5)
2. Rappeler la définition d'une distribution régulière. (/0.5)
3. Quelle est l'expression de la distribution associée $\langle T_f, \phi \rangle$. (/1)
4. Montrer que la dérivée de la distribution T_f correspond à la valeur principale $Vp(\frac{1}{x})$. (/1)
5. Calculer la dérivée seconde de la distribution T_f . (/2)

EXERCICE II : Série de Fourier (/5. pts)

Soit $f(x)$ la fonction 1-périodique telle que :

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in]-\frac{1}{2}; 0[\\ 1 & \text{si } x \in]0; \frac{1}{2}[\end{cases}$$

1. Tracer le graphe de la fonction dans l'intervalle $x \in [-\frac{1}{2}; 2]$. Que peut-on dire sur la parité de cette fonction ? (/0.5)
2. Trouver l'expression de $C_n(f)$. (/2)
3. En déduire une expression pour les coefficients pairs $C_{2k}(f)$ et une expression pour les coefficients impairs $C_{2k+1}(f)$. (/0.5)
4. Exprimer $\int_0^1 |f(x)|^2 dx$ en fonction de l'expression des coefficients précédemment trouvés et en déduire une expression de $\frac{\pi^2}{8}$ sous forme de série. (/1)
5. En utilisant le résultat précédent, montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (/1)

Formulaire

Définition de quelques distributions :

$$\begin{aligned}\langle \text{Vp} \frac{1}{x}, \varphi \rangle &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{+\epsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right\} \\ \langle \text{PF} \frac{1}{x^2}, \varphi \rangle &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx + \int_{+\epsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx - 2 \frac{\varphi(0)}{\epsilon} \right] \\ \langle \text{PF} \frac{1}{x^3}, \varphi \rangle &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x^3} dx + \int_{+\epsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x^3} dx - 2 \frac{\varphi'(0)}{\epsilon} \right]\end{aligned}$$

Développement en série de Fourier :

$$S_f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot \cos(n\omega t) + b_n \cdot \sin(n\omega t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\omega t} \quad \text{avec} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Coefficients de Fourier :

$$\begin{cases} a_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt, \quad \forall n \geq 1 \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt, \quad \forall n \geq 1 \\ C_n &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt, \quad \forall n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Formule de Parseval-Plancherel :

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt = |a_0|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2$$