

Licence Physique – 3ème année – Semestre 5
MÉTHODES MATHÉMATIQUES POUR LA PHYSIQUE

Contrôle continu numéro 3

Aucune source documentaire n'est autorisée – Durée de l'épreuve : 2 heures

EXERCICE I : Hilbert (/7 pts)

Deux opérateurs $\hat{A}$ et $\hat{B}$ sont représentés dans une base orthonormée $\mathcal{B}$ par les matrices A et B suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & i\sqrt{2} & 1 \\ -i\sqrt{2} & 2 & i\sqrt{2} \\ 1 & -i\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -i\sqrt{2} & 1 \\ i\sqrt{2} & 0 & -i\sqrt{2} \\ 1 & i\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Que valent les opérateurs adjoints $\hat{A}^\dagger$ et $\hat{B}^\dagger$? (/0,5 pt)
2. Déterminer le vecteur propre normalisé $|X\rangle$ de $\hat{A}$ correspondant à la valeur propre 0, écrit dans la base $\mathcal{B}$ sous la forme du vecteur colonne $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, où l'on impose $x = 1/2$. (/1 pt)
3. Déterminer le vecteur propre normalisé $|Y\rangle$ de $\hat{B}$ correspondant à la valeur propre -2, écrit dans la base $\mathcal{B}$ sous la forme du vecteur colonne $Y = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, où l'on impose $x' = 1/2$. (/1 pt)
4. Montrer que $|X\rangle$ est également vecteur propre de $\hat{B}$ et donner la valeur propre correspondante. (/0,5 pt)
5. Montrer que $|Y\rangle$ est également vecteur propre de $\hat{A}$ et donner la valeur propre correspondante. (/0,5 pt)
6. Montrer l'orthogonalité des vecteurs $|X\rangle$ et $|Y\rangle$. (/0,5 pt)
7. Déterminer le vecteur $|Z\rangle$, orthogonal à la fois à $|X\rangle$ et à $|Y\rangle$, écrit dans la base $\mathcal{B}$ sous la forme du vecteur colonne $Z = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$, où l'on impose $x'' = 1/\sqrt{2}$. (/0,5 pt)
8. Calculer la norme du vecteur $|Z\rangle$. (/0,5 pt)
9. Montrer que $|Z\rangle$ est vecteur propre de $\hat{A}$ et donner la valeur propre correspondante. (/1 pt)
10. Montrer que $|Z\rangle$ est vecteur propre de $\hat{B}$ et donner la valeur propre correspondante. (/1 pt)

EXERCICE II : Transformées de Fourier et distributions. (/7 pts)

A) Soit la fonction suivante :

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

1. Représenter la fonction $f(x)$. (/0,5 pt)
2. Calculer $\mathcal{F}[f](k)$ la transformée de Fourier de la fonction $f(x)$. (/1 pt)
3. Déterminer la valeur de $\mathcal{F}[f](0)$. (/1 pt)

B) On s'intéresse maintenant à la distribution régulière T_f associée à la fonction :

$$f(x) = 1 - x^2, \forall x \in \mathbb{R}$$

1. Soit T_1 la distribution régulière associée à la fonction $1_{\mathbb{R}}(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Montrer que la transformée de Fourier de cette distribution vaut : $\mathcal{F}[T_1] = 2\pi\delta$. (/1 pt)
2. Soit T_x la distribution régulière associée à la fonction $g(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$. Montrer que la transformée de Fourier de cette distribution vaut : $\mathcal{F}[T_x] = 2\pi i\delta'$. (/1,5 pts)
(Indice : On pourra utiliser la relation : $\mathcal{F}[x\varphi](k) = -i\frac{d}{dk}\mathcal{F}[\varphi](k)$ avec $\varphi \in \mathcal{D}$ une fonction test.)
3. À l'aide des questions précédentes, déterminer l'expression de $\mathcal{F}[T_f]$ la transformée de Fourier de la distribution T_f . (/2 pts)

EXERCICE III : Probabilités (/6 pts)

1. Calculer, si elles existent, la moyenne et la variance des distributions suivantes (/2 pts)

(a)

$$\rho(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

(b)

$$\rho(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2} \text{ si } x \in \mathbb{R}$$

2. Considérons la densité de probabilité conjointe aux deux variables aléatoires X et Y définie par :

$$\rho(x, y) = \begin{cases} K e^{-\alpha x - \beta y} & \text{si } x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

avec K, α et β des constantes réelles positives.

- (a) Calculer la constante K . (/1 pt)
- (b) Calculer les moyennes $\langle X \rangle$ et $\langle Y \rangle$. (/1 pt)
- (c) Calculer les variances $\text{Var}(X)$ et $\text{Var}(Y)$. (/1 pt)
- (d) Calculer la covariance $\text{Cov}(X, Y)$ et le coefficient de corrélation $\text{Corr}(X, Y)$. (/1 pt)

Formulaire

Transformée de Fourier de $f(x)$:

$$\forall k \in \mathbb{R}, \mathcal{F}[f](k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{+ikx} dx$$

Transformée de Fourier inverse de $g(k)$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathcal{F}^{-1}[g](x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) e^{-ikx} dk$$

Probabilités :

Covariance : $\text{Cov}(X, Y) = \langle (X - \langle X \rangle)(Y - \langle Y \rangle) \rangle$

Coefficient de corrélation : $\text{Corr}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$, σ_X et σ_Y étant les écarts-types