

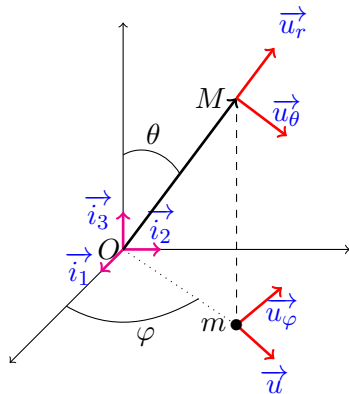
## Méthodes mathématiques pour la physique

Épreuve de substitution, durée une heure

22 octobre 2025

Documents, calculatrice et téléphones portables interdits

### Exercice 1



Soit un point  $M$  repéré en coordonnées cartésiennes:

$$\overrightarrow{OM} = x_1 \vec{i}_1 + x_2 \vec{i}_2 + x_3 \vec{i}_3.$$

On repère le même point en coordonnées sphériques:

$$\overrightarrow{OM} = r \vec{u}_r,$$

et on note  $(r, \theta, \varphi)$ ,  $r \geq 0$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$  et  $0 \leq \theta < \pi$  les coordonnées sphériques.

**1** Formule de changement de base.

**1.1** Exprimer les coordonnées  $x_1, x_2$  et  $x_3$  en fonction des coordonnées  $r, \theta$  et  $\varphi$ .

**1.2** Exprimer les coordonnées  $r, \theta$  et  $\varphi$  en fonction des coordonnées  $x_1, x_2$  et  $x_3$ .

**2** Soient  $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi$  et  $\vec{u}$  les vecteurs unitaires associés aux coordonnées sphériques (voir dessin).

**2.1** Exprimer les vecteurs  $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta$  en fonction des vecteurs  $\vec{i}_3$  et  $\vec{u}$ .

**2.2** Exprimer les vecteurs  $\vec{u}_\varphi, \vec{u}$  en fonction des vecteurs  $\vec{i}_1$  et  $\vec{i}_2$ .

**2.3** En déduire les vecteurs  $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta$  en fonction des vecteurs  $\vec{i}_1, \vec{i}_2$  et  $\vec{i}_3$ .

**3** On rappelle les produits vectoriels suivants  $\vec{i}_1 \times \vec{i}_2 = \vec{i}_3, \vec{i}_2 \times \vec{i}_3 = \vec{i}_1$  et  $\vec{i}_3 \times \vec{i}_1 = \vec{i}_2$ .

**3.1** Calculer  $\vec{u}_r \times \vec{u}_\theta$ .

**3.2** En déduire  $\vec{u}_\theta \times \vec{u}_\varphi$  et  $\vec{u}_\varphi \times \vec{u}_r$ .

**4** On rappelle qu'un éléments de ligne s'écrit:

$$d\vec{l} = d\vec{l}_r + d\vec{l}_\theta + d\vec{l}_\varphi, \quad d\vec{l}_r = dr \vec{u}_r, \quad d\vec{l}_\theta = r d\theta \vec{u}_\theta, \quad d\vec{l}_\varphi = r \sin \theta d\varphi \vec{u}_\varphi.$$

**4.1** Calculer  $d\vec{l}_r \times d\vec{l}_\theta, d\vec{l}_\theta \times d\vec{l}_\varphi$  et  $d\vec{l}_\varphi \times d\vec{l}_r$ . Comparer aux surface élémentaires du petit cube (voir dessin). Interpréter.

**4.2** Calculer  $d\vec{l}_r \cdot (d\vec{l}_\theta \times d\vec{l}_\varphi)$ . Comparer au volume élémentaires du petit cube (voir dessin). Interpréter.

