

Electromagnétisme dans la matière

Yaël Moussouni*

*Observatoire astronomique de Strasbourg, UMR 7550,
CNRS/Université de Strasbourg, 11 rue de l'Université, 67000 Strasbourg, France*

Révisé et augmenté par Maxence Pandini†

CESQ/ISIS (UMR 7006), CNRS/Université de Strasbourg, 67000 Strasbourg, France

Notes inspirées par le cours d'électromagnétisme dans la matière (L3S6) du Pr. Mebarek Alouani en 2023.

Licence : En soumettant ces notes de cours aux *Strasbourg Students Physical Letters*, les auteurs certifient qu'ils ont obtenu l'accord de l'enseignant, et acceptent eux-mêmes qu'elles soit distribuées sous la licence CC BY-SA 4.0 (Distribution libre - Attribution - Partage sous les mêmes conditions) sur le site des 2SPL (www.2spl.fr).

Avertissement : Ces notes n'ont pas été corrigées par l'enseignant et peuvent contenir des erreurs ou dévier du contenu du cours. L'enseignant ne peut être tenu pour responsable d'éventuelles erreurs ou inexactitudes contenues dans ces notes.

CONTENTS

Rappels d'analyse vectorielle et tensorielle	3
Identités vectorielles	3
Tenseur de Levi-Civita	3
Gradient, divergence, rotationnel et Laplacien en coordonnées curvilignes	3
Théorème de GREEN-OSTROGRADSKI	4
Théorème de STOKES	4
Théorème de HELMHOLTZ-HODGE	4
I. Milieux diélectriques	4
A. Milieux diélectriques et polarisation	4
B. Développement multipolaire	5
C. Polarisation et potentiel électrostatique dipolaire	6
1. Potentiel électrostatique créé par un diélectrique polarisé	6
2. Cas d'une polarisation uniforme	6
3. Distribution de charges équivalentes à la polarisation	6
4. Interprétation des charges liées	7
5. Champ électrique macroscopique et fluctuations quantiques	7
D. Exemples de champs électriques créés par des matériaux polarisés	8
1. Plaque homogène polarisée uniformément	8
2. Sphère homogène uniformément polarisée	9
E. Vecteur déplacement électrique	9
F. Matériaux diélectriques linéaires et loi constitutive de la matière	10
G. Exemples	10
1. Sphère métallique	10
2. Diélectrique dans un condensateur	11
3. Diélectrique linéaire sphérique	12
H. Énergie d'un diélectrique	13
I. Polarisabilité et susceptibilité des liquides et gaz	13
II. Milieux magnétiques	15
A. Champ magnétique d'un courant permanent	15
B. Théorème d'AMPÈRE	15

* yael.moussouni@astro.unistra.fr

† mpandini@unistra.fr

C. Divergence et rotationnel du champ magnétique	16
D. Potentiel vecteur magnétique	16
E. Développement multipolaire du potentiel vecteur magnétique	17
F. Potentiel vecteur et champ magnétique d'un dipôle magnétique	18
G. Introduction au magnétisme dans la matière	18
H. Forces et moments de forces sur des dipôles magnétiques	19
I. Effet d'un champ magnétique sur des orbitales atomiques	19
J. Vecteur aimantation	20
K. Champ magnétique d'un matériau aimanté	20
L. Aimantation et distribution de courant équivalents	21
M. Interprétation des courants liés	21
N. Vecteur champ d'aimantation	22
O. Milieux aimantés linéaires et non-linéaires	22
P. Exemples de champ magnétique créé par des corps aimantés	22
1. Sphère uniformément aimantée	22
2. Cylindre de révolution aimanté uniformément selon son axe	23
3. Solénoïde infini	23
Q. Force exercée sur un échantillon diamagnétique ou paramagnétique par un champ magnétique inhomogènes	24
1. Densité volumique de force	24
2. Mesure de susceptibilité	24
R. Matériaux à forte perméabilité	25
S. Ferromagnétisme	25
1. Courbe de première aimantation	26
2. Interprétation du ferromagnétisme (P. WEISS, 1907)	26
3. Hystérésis	26
4. Ferromagnétisme doux et durs, cycles d'hystérésis et pertes par hystérésis	26
T. Aspect microscopique du ferromagnétisme	27
III. Ondes électromagnétiques dans la matière	27
A. Equations de MAXWELL dans le vide et la matière	27
B. Équation d'onde	28
1. Introduction	28
2. Cas d'une propagation à une dimension	29
3. Extension à trois dimensions	30
4. Ondes sinusoïdales et notation complexe	30
5. Polarisation	31
6. Polariseur	31
7. Lampe à retard	31
8. Conditions aux limites, réfraction et transmission	32
C. Ondes électromagnétiques dans les diélectriques	33
1. Ondes électromagnétiques dans le vide	33
2. Énergie, quantité de mouvement et vecteur de POYNTING d'une onde plane monochromatique	33
3. Propagation d'une onde électromagnétique dans les matériaux linéaires	34
4. Réfraction et transmission à incidence normale	34
5. Réflexion et transmission d'une onde électromagnétique à incidence oblique	35

RAPPELS D'ANALYSE VECTORIELLE ET TENSORIELLE

Identités vectorielles

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} \times \mathbf{B} \times \mathbf{C} &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}, & (1) \\
 \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A}, & (2) \\
 \nabla \cdot (f\mathbf{A}) &= f(\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla)f, & (3) \\
 \nabla(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}), & (4) \\
 \nabla \times (f\mathbf{A}) &= f(\nabla \times \mathbf{A}) - (\mathbf{A} \times \nabla)f, & (5) \\
 \nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{A} - (\nabla \cdot \mathbf{A})\mathbf{B}, & (6) \\
 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}. & (7)
 \end{aligned}$$

Tenseur de Levi-Civita

On définit le tenseur de Levi-Civita par

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} = \begin{cases} 0 & \text{si deux indices sont égaux} \\ 1 & \text{si } \alpha\beta\gamma \text{ est une permutation paire} \\ -1 & \text{si } \alpha\beta\gamma \text{ est une permutation impaire} \end{cases}. \quad (8)$$

Soient $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ deux vecteurs 3D, on peut définir le produit vectoriel à partir du tenseur de Levi-Civita :

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} u_\beta v_\gamma \hat{\mathbf{e}}_\alpha, \quad (9)$$

où la convention de sommation d'Einstein a été utilisée.

Gradient, divergence, rotationnel et Laplacien en coordonnées curvilignes

Soit un point M de coordonnées (u, v, w) dans un référentiel orthonormé $(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{w}})$. On définit le point M' de coordonnées $(u + du, v + dv, w + dw)$ comme le déplacement infinitésimal du point M par le vecteur $d\mathbf{l}$ défini par

$$d\mathbf{l} = f du \hat{\mathbf{u}} + g dv \hat{\mathbf{v}} + h dw \hat{\mathbf{w}}. \quad (10)$$

En coordonnées cartésiennes, on a :

$$\begin{aligned}
 (\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{w}}) &= (\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}), \\
 -\infty &< x, y, z < +\infty, \\
 f &= 1, \quad g = 1, \quad h = 1.
 \end{aligned} \quad (11)$$

En coordonnées cylindriques, on a :

$$\begin{aligned}
 (\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{w}}) &= (\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\mathbf{z}}), \\
 0 \leq r &< +\infty, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty \\
 f &= 1, \quad g = r, \quad h = 1.
 \end{aligned} \quad (12)$$

En coordonnées sphériques, on a :

$$\begin{aligned}
 (\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{w}}) &= (\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\varphi}}), \\
 0 \leq r &< +\infty, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \\
 f &= 1, \quad g = r, \quad h = r \sin(\theta).
 \end{aligned} \quad (13)$$

Le gradient est généralement définie par :

$$\nabla F = \frac{1}{f} \frac{\partial F}{\partial u} \hat{\mathbf{u}} + \frac{1}{g} \frac{\partial F}{\partial v} \hat{\mathbf{v}} + \frac{1}{h} \frac{\partial F}{\partial w} \hat{\mathbf{w}}, \quad (14)$$

la divergence par :

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{fgh} \left[\frac{\partial}{\partial u} (ghA_u) + \frac{\partial}{\partial v} (fhA_v) + \frac{\partial}{\partial w} (fgA_w) \right], \quad (15)$$

le rotationnel par :

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{fgh} \begin{vmatrix} f\hat{\mathbf{u}} & g\hat{\mathbf{v}} & h\hat{\mathbf{w}} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ fA_u & gA_v & hA_w \end{vmatrix}, \quad (16)$$

et enfin le Laplacien par :

$$\nabla^2 F = \frac{1}{fgh} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{gh}{f} A_u \frac{\partial F}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{fh}{g} \frac{\partial F}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{fg}{h} \frac{\partial F}{\partial w} \right) \right]. \quad (17)$$

Théorème de GREEN-OSTROGRADSKI

Soit Σ la surface fermée entourant Ω , pour un vecteur $\mathbf{A}$, on a :

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{A} d^3\mathbf{r} \quad (18)$$

Théorème de STOKES

Soit $\mathcal{C}$ un chemin fermé entourant la surface Σ , pour un vecteur $\mathbf{A}$, on a :

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \iint_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} \quad (19)$$

Théorème de HELMHOLTZ-HODGE

Soient $\alpha(\mathbf{r})$ un champ scalaire et $\beta(\mathbf{r})$ un champ vectoriel tel que $\nabla \cdot \beta(\mathbf{r}) = 0$, tous deux supposés décroître à l'infini comme $O(r^{-2})$. Il existe un unique champ vectoriel $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ tel que

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \alpha(\mathbf{r}) \neq 0 \\ \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \beta(\mathbf{r}) \neq 0 \end{cases} \quad (20)$$

Alors :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r}) + \nabla \times \mathbf{W}(\mathbf{r}), \quad (21)$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\alpha(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} d^3\mathbf{r}', \quad \mathbf{W}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\beta(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} d^3\mathbf{r}'$$

I. MILIEUX DIÉLECTRIQUES

A. Milieux diélectriques et polarisation

Contrairement aux milieux conducteurs, où le champ électrique et la densité volumique moyenne des charges électriques sont nuls, un *milieu diélectrique* est pénétré par un champ électrique qui agit sur les porteurs de charges de

la matière. Ces porteurs de charges (ions ou électrons) ne peuvent pas se déplacer librement sous l'effet d'un champ électrique. Ces charges électriques *liées* restent attachées aux atomes, molécules ou cristaux. Par conséquent, toutes les propriétés des diélectriques peuvent s'interpréter par l'apparition dans tout le volume, initialement neutre, d'un moment dipolaire électrique. C'est le phénomène de *polarisation*.

Dans un élément de volume $d\Omega$, les barycentres des charges positives et négatives, initialement confondus, se séparent sous l'effet du champ électrique, formant un dipôle électrique de moment dipolaire $d\mathbf{p} = \sum_i d\mathbf{p}_i$ (où $\mathbf{p}_i$ est le moment dipolaire généré par chacune des charges dans le volume). On caractérise le milieu par son moment dipolaire par unité de volume :

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \frac{d\mathbf{p}}{d\Omega} \quad (22)$$

La polarisation est une fonction continue possédant des discontinuités aux surfaces. Le potentiel associé est :

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{u}}_r}{r^2} \quad (23)$$

où $r = \|\mathbf{r}\|$ et $\hat{\mathbf{u}}_r = \frac{\mathbf{r}}{r}$.

B. Développement multipolaire

Le développement multipolaire permet l'approximation du potentiel d'un ensemble de charges dans la région de l'espace loin de cet ensemble. Souvent, ce potentiel est approximé comme $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ loin des charges électriques, mais si $Q = 0$ alors cette approximation est mauvaise. On utilise par conséquent l'approximation multipolaire. On considère une distribution de charges de densité ρ localisée dans un volume $\tau \subset \Omega$. Le potentiel est alors :

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} d^3\mathbf{r}' \quad (24)$$

En général, on a le développement en série entière :

$$\frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos(\theta)), \quad (25)$$

où les P_n sont les polynômes de LEGENDRE. On écrit donc le potentiel comme :

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \iiint_{\Omega} r'^n P_n(\cos(\theta)) \rho(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' \quad (26)$$

C'est l'expression multipolaire du potentiel V . On a, aux différents ordres :

— Ordre 0 :

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}. \quad (27)$$

— Ordre 1 :

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \iiint_{\Omega} r' \cos(\theta) \rho(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' \quad (28)$$

Pour deux charges $+Q$ et $-Q$ situées en $+\mathbf{d}$ et $-\mathbf{d}$, la densité de charges s'écrit $\rho(\mathbf{r}') = Q\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{d}) - Q\delta(\mathbf{r}' + \mathbf{d})$. On peut alors explicitement calculer que

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{u}}_r}{r^2}. \quad (29)$$

C. Polarisation et potentiel électrostatique dipolaire

1. Potentiel électrostatique créé par un diélectrique polarisé

On considère le potentiel d'un dipôle :

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{u}}_r}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \quad (30)$$

Le volume $d^3\mathbf{r}'$ possède un moment dipolaire tel que $\delta\mathbf{p} = P(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'$, ainsi

$$\delta V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\delta\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} d^3\mathbf{r}'. \quad (31)$$

Finalement :

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} d^3\mathbf{r}' \quad (32)$$

2. Cas d'une polarisation uniforme

On considère un matériau homogène dans lequel la polarisation y est uniforme, c'est à dire $\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \mathbf{P} = \text{cst}$, alors :

$$V(\mathbf{r}) = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} d^3\mathbf{r}' \right) \mathbf{P}. \quad (33)$$

La partie du potentiel entre parenthèses ressemble à un champ électrique $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ créé par une charge électrique de densité volumique $\rho(\mathbf{r})$ égale à un et répartie sur tout le domaine Ω :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} d^3\mathbf{r}' \quad (34)$$

Pour calculer le potentiel V , il suffit de calculer ce champ électrique auxiliaire et de le multiplier par la polarisation P .

3. Distribution de charges équivalentes à la polarisation

On utilise les identités mathématiques suivantes :

$$\nabla_{r'} \left(\frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \right) = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3}, \quad \nabla \cdot (\lambda \mathbf{P}) = \lambda \nabla \cdot \mathbf{P} + \mathbf{P} \nabla \lambda, \quad (35)$$

pour écrire

$$\frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} = \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \nabla_{r'} \left(\frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \right) = \nabla_{r'} \cdot \left(\frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \right) - \left(\frac{\nabla_{r'} \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \right) \quad (36)$$

Ainsi, le potentiel peut se réécrire comme :

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \nabla_{r'} \cdot \left(\frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \right) d^3\mathbf{r}' - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \left(\frac{\nabla_{r'} \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \right) d^3\mathbf{r}'. \quad (37)$$

En utilisant le théorème de GREEN-OSTROGRADSKI et en posant $\sigma_l(\mathbf{r}) = \mathbf{P}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{u}}_n$ (où $\hat{\mathbf{u}}_n$ est le vecteur unitaire normal à la surface Σ) et $\rho_l(\mathbf{r}) = -\nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r})$, on obtient :

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\iiint_{\Omega} \frac{\rho_l(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} d^3\mathbf{r}' + \oint_{\Sigma} \frac{\sigma_l(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} d^2\mathbf{r}' \right]. \quad (38)$$

$\rho_l(\mathbf{r})$ représente la densité volumique de charges liées et $\sigma_l(\mathbf{r})$ la densité surfacique de charges liées. La distribution surfacique de charges σ_l est due à la discontinuité du vecteur polarisation $\mathbf{P}$ à la surface Σ du matériau. En effet, seule la variation de charges suivant z est très rapide donc $\rho_l(\mathbf{r}) = -\frac{\partial P_z(\mathbf{r})}{\partial z}$ et

$$\sigma_l(\mathbf{r}) = \int_{-\varepsilon}^0 \rho_l(\mathbf{r}) dz = \int_{-\varepsilon}^0 -\frac{\partial P_z(\mathbf{r})}{\partial z} dz = -[P_z]_{-\varepsilon}^0 = \mathbf{P}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{u}}_n. \quad (39)$$

Le potentiel d'un matériau polarisé est donc la somme de deux potentiels produits respectivement par une densité volumique de charges liées $\rho_l(\mathbf{r})$ et par une densité surfacique de charges liées $\sigma_l(\mathbf{r})$.

4. Interprétation des charges liées

En considérant un segment de dipôles alignés, on voit que chaque charge positive annule la charge négative de son voisin. Aux extrémités, il reste une charge positive d'un côté et une charge négative de l'autre. Aucune charge n'a fait le déplacement total, c'est une suite de petits déplacements qui est responsable de l'état final de l'objet polarisé. C'est à cause de ces petits déplacements que les charges aux extrémités sont appelées *charges liées*, pour rappeler que ces charges ne peuvent être enlevées du système.

En général, soit un domaine Ω du diélectrique, limité par une surface Σ de grandes dimensions par rapport aux dimensions atomiques. Soient q_i les différentes charges électriques de densité n_i . Si $P = 0$, alors $\sum_i n_i q_i = 0$. La polarisation est créée par les déplacements δ_i des charges électriques q_i :

$$\mathbf{P} = \sum_i n_i q_i \delta_i. \quad (40)$$

Le flux de charges à travers $d\Sigma$ est donné par :

$$d\phi = \sum_i n_i q_i \delta_i \cdot d\Sigma = \mathbf{P} \cdot d\Sigma. \quad (41)$$

Ce sont les charges contenues dans le cylindre de base $d\Sigma$ et de génératrice δ_i , donc de volume $\delta_i \cdot d\Sigma$, qui forment ce flux de charges. La charge totale ΔQ qui traverse la surface Σ , c'est à dire qui quitte le domaine Ω , est donnée par :

$$\Delta Q = \oint_{\Sigma} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}. \quad (42)$$

Le domaine Ω contient maintenant une charge totale liée :

$$\Delta Q_l = - \oint_{\Sigma} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} -\nabla \cdot \mathbf{P} d\tau. \quad (43)$$

On obtient effectivement une densité volumique de charges liées $\rho_l = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ représentant un excédent local de charges liées. Le diélectrique est neutre avant et après la polarisation :

$$\iiint_{\Omega} \rho_l d^3\tau + \oint_{\Sigma} \sigma_l dS = 0. \quad (44)$$

5. Champ électrique macroscopique et fluctuations quantiques

À l'intérieur de la matière, le champ électrique microscopique $\mathbf{E}_{\text{micro}}(\mathbf{r}, t)$ est très complexe car il dépend des positions de tous les atomes et de tous les électrons, donc de la densité microscopique $\rho(\mathbf{r}, t)$.

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_{\text{micro}}(\mathbf{r}, t) = \frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\varepsilon_0}, \quad \nabla \times \mathbf{E}_{\text{micro}}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}_{\text{micro}}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}. \quad (45)$$

Les champs microscopiques sont très difficiles à mesurer ou à calculer. La connaissance de $\rho(\mathbf{r}, t)$ permet de déterminer $\mathbf{E}_{\text{micro}}$. En pratique, la connaissance de ce champ microscopique n'est pas nécessaire pour décrire les phénomènes

macroscopiques. Les appareils de mesures ne sont sensibles qu'aux valeurs moyennes locales des grandeurs microscopiques. Ainsi, nous n'allons considérer que les valeurs moyennes spatiales des grandeurs microscopiques, sur un domaine Ω petit à l'échelle macroscopique mais grand devant les dimensions atomiques :

$$\langle A \rangle(\mathbf{r}) = \frac{1}{\Omega} \iiint_{\Omega} A(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'. \quad (46)$$

Ainsi, le champ moyen est alors :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{E}_{\text{micro}}(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{1}{\Omega} \iiint_{\Omega} \mathbf{E}(\mathbf{r}', t) d^3\mathbf{r}' \quad (47)$$

Le champ électrique $\mathbf{E}$ est une valeur macroscopique moyenne. Nous avons par conséquent supprimé les fluctuations du champ électrique. Un choix raisonnable pour le rayon du domaine Ω est généralement entre 30 Å et 100 Å. En électrodynamique classique, toutes les grandeurs utilisées sont des grandeurs macroscopiques. Pour décrire des situations dans lesquelles on rencontre à la fois des conducteurs et des diélectriques, ou dans le cas où l'on injecte des charges mobiles dans des diélectriques, la charge totale devient $\rho(\vec{r}, t) = \rho_l(\vec{r}, t) + \rho_f(\vec{r}, t)$ où ρ_l est la densité volumique de charges liées et ρ_f est la densité volumique de charges libres. La loi de GAUSS locale devient :

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho_f(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} - \frac{\nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} \quad (48)$$

Le principe de superposition nous permet d'écrire $\mathbf{E}(\vec{r}, t) = \mathbf{E}_l(\vec{r}, t) + \mathbf{E}_f(\vec{r}, t)$, le champ $\mathbf{E}_l$ étant engendré par les charges liées et le champ $\mathbf{E}_f$ par les charges libres.

D. Exemples de champs électriques créés par des matériaux polarisés

1. Plaque homogène polarisée uniformément

On considère une plaque homogène polarisée uniformément de polarisation $\mathbf{P}$. On néglige les effets de bords. La plaque diélectrique polarisée est équivalente à une plaque avec une densité surfacique $\sigma_l = P$ sur une face et $\sigma_l = -P$ sur l'autre face.

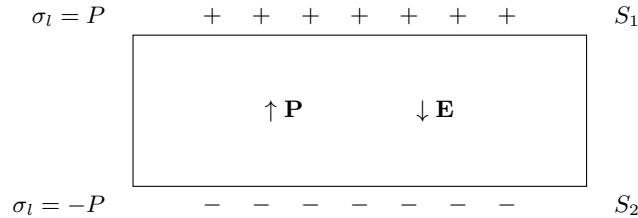


FIGURE 1 – Matériau polarisé.

Le théorème de Gauss montre que :

$$\oiint_{\Sigma} \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{S} = \frac{S_1 P}{\varepsilon_0} \Rightarrow 2S_1 E_1 = \frac{S_1 P}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_1 = \frac{P}{2\varepsilon_0} \quad (49)$$

De même :

$$E_2 = -\frac{P}{2\varepsilon_0} \quad (50)$$

Avec $\mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n = \sigma_l$, on montre que le champ électrique dépolarisant s'exprime comme

$$\mathbf{E} = -\frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0} \quad (51)$$

2. Sphère homogène uniformément polarisée

Soit une sphère de centre O et de rayon R limitant un domaine Ω de polarisation $\mathbf{P}$. Généralement :

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} d^3\mathbf{r}'. \quad (52)$$

On considère deux cas. Tout d'abord, à l'intérieur de la sphère ($r < R$), le potentiel électrique est donné par :

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}) &= \frac{\mathbf{P}}{4\pi\epsilon_0} \cdot \iiint_{\Omega} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} d^3\mathbf{r}' \\ &= \frac{\mathbf{P}}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) \\ &= \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{r}}{3\epsilon_0}. \end{aligned} \quad (53)$$

Le champ électrique à l'intérieur de la sphère est donc donné par :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r}) = -\frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0}. \quad (54)$$

Le champ électrique à l'intérieur du diélectrique est causé par la polarisation $\mathbf{P}$ et est toujours de sens opposé à celle-ci. C'est le champ électrique dépolarisant. A l'extérieur de la sphère ($r > R$), le potentiel électrique est donné par :

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}) &= \frac{\mathbf{P}}{4\pi\epsilon_0} \cdot \iiint_{\Omega} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} d^3\mathbf{r}' \\ &= \frac{\mathbf{P}}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) \\ &= \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{r}}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r^3}. \end{aligned} \quad (55)$$

On obtient l'expression du champ électrique créé par une charge ponctuelle dans l'expression du potentiel électrique. En définissant le moment dipolaire de la sphère par $\mathbf{p} = \frac{4}{3} \pi R^3 \mathbf{P}$, le potentiel du diélectrique devient :

$$V(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{3\epsilon_0 r^2}. \quad (56)$$

C'est le potentiel électrique d'un dipole électrique. Son champ électrique est donné par :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -\nabla V(\mathbf{r}) \\ &= -\left(\frac{\partial V}{\partial r} \hat{\mathbf{u}}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\mathbf{u}}_\theta \right) \\ &= \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos(\theta) \hat{\mathbf{u}}_r + \sin(\theta) \hat{\mathbf{u}}_\theta) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{u}}_r) \hat{\mathbf{u}}_r - \mathbf{p}). \end{aligned} \quad (57)$$

E. Vecteur déplacement électrique

La loi de GAUSS locale donne :

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho_f(\mathbf{r})}{\epsilon_0} - \frac{\nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \quad (58)$$

En général, on introduit le vecteur de déplacement électrique $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$, alors :

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \rho_f(\mathbf{r}). \quad (59)$$

Il est faux de conclure que le vecteur $\mathbf{D}(\mathbf{r})$ dépend seulement des distributions de charges libres car son rotationnel n'est généralement pas nuls. En effet, $\nabla \times \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{P}(\mathbf{r})$. Même dans le cas où $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ est uniforme, sa composante tangentielle peut être discontinue à l'interface de deux diélectriques, d'où une discontinuité de $\mathbf{D}(\mathbf{r})$. On ne peut donc pas en déduire une loi de COULOMB de la forme :

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) \neq \frac{1}{4\pi} \iiint_{\mathbf{D}} \rho_f(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} d^3\mathbf{r}'. \quad (60)$$

Si le problème à résoudre à une symétrie sphérique, cylindrique ou plane, on peut obtenir $\mathbf{D}(\mathbf{r})$ à partir de la loi de COULOMB. En effet, dans ce cas particulier $\nabla \times \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$. On obtient $\mathbf{D}(\mathbf{r})$ en appliquant le théorème de GAUSS :

$$\oiint_{\Sigma} \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = Q_f. \quad (61)$$

En l'absence de symétrie, la loi de Coulomb ne s'applique pas.

F. Matériaux diélectriques linéaires et loi constitutive de la matière

Dans beaucoup de diélectriques (dit linéaires), la polarisation est linéairement proportionnelle au champ électrique total :

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E} \quad (62)$$

où χ_e est la susceptibilité électrique du milieu. C'est la relation constitutive du milieu. C'est une bonne approximation si le champ électrique total $\mathbf{E}$ n'est pas trop grand.

Si on place un diélectrique linéaire dans un champ électrique externe $\mathbf{E}_0$, on ne peut pas directement calculer la polarisation $\mathbf{P}$ à partir de ce champ externe. Le champ électrique polarise le matériau et la polarisation produit un champ propre $\mathbf{E}_1$ qui à son tour polarise le matériau et ainsi de suite.

La meilleure approche pour ce problème est de commencer par déterminer le vecteur $\mathbf{D}$:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (63)$$

où $\varepsilon = \varepsilon_0 K = \varepsilon_0 (1 + \chi_e)$ est la permittivité du matériau, et $K = 1 + \chi_e = \varepsilon / \varepsilon_0$ est la constante diélectrique (sans dimension). En l'absence de matériau, $\chi_e = 0$ et $\varepsilon = \varepsilon_0$. C'est pour cette raison que ε_0 est appelée la permittivité du vide.

Pour un diélectrique linéaire, la densité de charge volumique liée est proportionnelle à la densité de charge libre. En effet :

$$\rho_l = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\nabla \cdot (\varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}) = -\frac{\varepsilon_0 \chi_e}{\varepsilon} \nabla \cdot \mathbf{D} = -\frac{\chi_e}{1 + \chi_e} \rho_f. \quad (64)$$

En général, $\rho_l = 0$ et toute les charges liées se trouve sur les surfaces des diélectriques linéaires à moins que les charges libres ne soient fixées en volume.

G. Exemples

1. Sphère métallique

Une sphère métallique de rayon R_a et de charge électrique Q est entourée par une calotte sphérique diélectrique de rayon externe R_b et de permittivité ε . Pour calculer $V(\mathbf{r})$, il nous faut déterminer $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ pour lequel il faut déterminer les charges liées, pour lesquelles il faut déterminer $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ pour laquelle $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ est nécessaire. Grâce à la symétrie sphérique, on a :

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{si } r < R_a \\ \frac{Q}{4\pi r^3} \mathbf{r} & \text{si } r > R_a \end{cases}, \quad (65)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{D}(\mathbf{r})}{\varepsilon} = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{si } r < R_a \\ \frac{Q}{4\pi \varepsilon r^3} \mathbf{r} & \text{si } R_a < r < R_b \\ \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 r^3} \mathbf{r} & \text{si } R_b < r \end{cases}.$$

Le potentiel au centre est donc donné par :

$$\begin{aligned}
 V(\mathbf{0}) &= - \int_{-\infty}^0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} \\
 &= - \int_{-\infty}^{R_b} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr - \int_{R_b}^{R_a} \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} dr - \int_{R_a}^0 0 dr \\
 &= \frac{Q}{4\pi} \left(\frac{1}{\epsilon_0 R_b} + \frac{1}{\epsilon R_a} - \frac{1}{\epsilon R_b} \right).
 \end{aligned} \tag{66}$$

La polarisation est donnée par :

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{\epsilon_0 \chi_e Q}{4\pi \epsilon r^3} \mathbf{r} & \text{si } R_a < r < R_b \\ \frac{\chi_e Q}{4\pi r^3} \mathbf{r} & \text{si } R_b < r \end{cases}. \tag{67}$$

Enfin, les charges liées sont données par :

$$\rho_l(\mathbf{r}) = -\nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}) = 0, \quad \sigma_l(\mathbf{r}) = \mathbf{P}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{u}}_n = \begin{cases} \frac{\epsilon_0 \chi_e Q}{4\pi \epsilon r^2} & \text{si } r = R_b \\ -\frac{\epsilon_0 \chi_e Q}{4\pi \epsilon r^2} & \text{si } r = R_a \end{cases} \tag{68}$$

Le vecteur unitaire $\hat{\mathbf{u}}_n$ est toujours dirigé vers l'extérieur du diélectrique. La charge Q attire son opposé à $r = R_a$. Le diélectrique se comporte comme un métal imparfait, il réduit au maximum le champ électrique à l'intérieur.

Bien que $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ et $\mathbf{D}(\mathbf{r})$ soient proportionnels à $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, leurs divergences ne s'annulent pas comme celle de $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ car en général $\oint \mathbf{P}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} \neq 0$. La raison principale est que le facteur de proportionnalité $\epsilon_0 \chi_e$ est différent de part et d'autre d'une interface, entre deux ou plusieurs diélectriques.

Si le diélectrique est uniforme alors $\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \rho_f(\mathbf{r})$ et $\nabla \times \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$, et le vecteur déplacement $\mathbf{D}(\mathbf{r})$ peut être déterminé à partir des charges libres comme si le diélectrique était absent. En effet, si $\mathbf{E}_f(\mathbf{r})$ est le champ électrique des charges libres, alors $\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \mathbf{E}_f(\mathbf{r})$. A partir du calcul de $\mathbf{D}(\mathbf{r})$, on peut déterminer le champ électrique total à l'intérieur du diélectrique avec :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{D}(\mathbf{r})}{\epsilon}. \tag{69}$$

2. Diélectrique dans un condensateur

On considère un condensateur dont l'espace entre les deux plans est un diélectrique (figure 2). Le champ exercé entre les deux plaques, séparées d'une distance d , est $\mathbf{E}_0$. On considère $\mathbf{P}$ le champ polarisant et $\mathbf{E}$ le champ total.

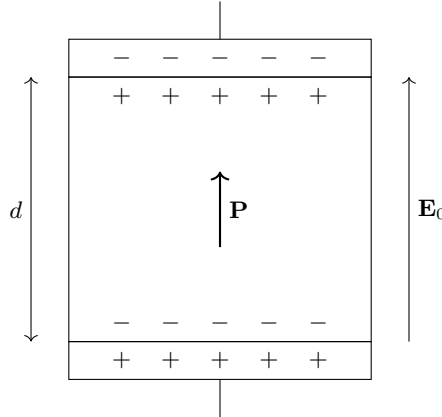


FIGURE 2 – Condensateur.

On a alors :

$$E_0 = \frac{\sigma_f}{\varepsilon_0}, \quad E = \frac{E_0}{K} = \frac{\sigma_f}{K\varepsilon_0}. \quad (70)$$

Puis :

$$V = Ed = \frac{\sigma_f d}{\varepsilon_0 K}. \quad (71)$$

D'où, la capacité du condensateur :

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\sigma_f S}{\frac{\sigma_f d}{\varepsilon_0 K}} = K \frac{\varepsilon_0 S}{d} = KC_0, \quad (72)$$

où S est la surface des armatures et C_0 est la capacité du condensateur sans diélectrique. La présence du diélectrique multiplie la capacité du condensateur par un facteur K correspondant à la constante diélectrique du matériau.

3. Diélectrique linéaire sphérique

On considère un diélectrique linéaire de forme sphérique placé dans un champ électrique uniforme $\mathbf{E}_0$. Quand on applique $\mathbf{E}_0$, la sphère se polarise avec une polarisation $\mathbf{P}_0 = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}_0$ (figure 3).

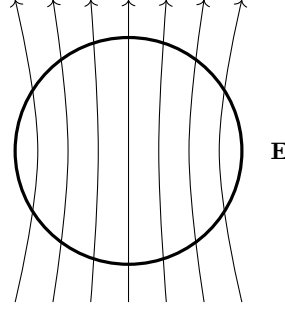


FIGURE 3 – Sphère diélectrique linéaire.

Cette polarisation n'est pas la polarisation finale. Elle crée un champ électrique $\mathbf{E}_1$ à l'intérieur de la sphère donné par :

$$\mathbf{E}_1 = -\frac{\mathbf{P}_0}{3\varepsilon_0} = -\frac{1}{3}\chi_e \mathbf{E}_0. \quad (73)$$

Le champ $\mathbf{E}_1$ polarise à son tour la sphère :

$$\mathbf{P}_1 = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}_1 = -\frac{1}{3}\varepsilon_0 \chi_e^2 \mathbf{E}_0. \quad (74)$$

Cette polarisation génère un champ :

$$\mathbf{E}_2 = -\frac{\mathbf{P}_1}{3\varepsilon_0} = \left(-\frac{1}{3}\chi_e\right)^2 \mathbf{E}_0. \quad (75)$$

Ce processus continue indéfiniment. A l'itération n , on obtient un champ additionnel donné par :

$$\mathbf{E}_n = \left(-\frac{1}{3}\chi_e\right)^n \mathbf{E}_0. \quad (76)$$

Le champ total est donc donnée par :

$$\mathbf{E} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{3}\chi_e\right)^n \mathbf{E}_0 = \frac{1}{1 + \frac{\chi_e}{3}} \mathbf{E}_0 = \frac{3}{2 + K} \mathbf{E}_0. \quad (77)$$

La polarisation est alors :

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E} = \frac{\varepsilon_0 \chi_e}{1 + \chi_e/3} \mathbf{E}_0. \quad (78)$$

Or cette polarisation totale produit un champ électrique dépolarisant $\mathbf{E}'$ égal à :

$$\mathbf{E}' = -\frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0} = -\frac{\chi_e}{3 + \chi_e} \mathbf{E}_0. \quad (79)$$

Le champ totale du dipôle prend une forme :

$$\mathbf{E}' + \mathbf{E}_0 = -\frac{\chi_e}{3 + \chi_e} \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_0 = \mathbf{E}. \quad (80)$$

H. Énergie d'un diélectrique

On considère la charge libre par élément infinitésimal $\delta\rho_f = \nabla \cdot (\delta\mathbf{D})$. Le travail pour ramener cette charge s'écrit :

$$\delta W = \iiint_{\Omega} \delta\rho_f(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot (\delta\mathbf{D}(\mathbf{r})) V(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}. \quad (81)$$

Avec $\nabla \cdot [(\delta\mathbf{D})V] = (\nabla \cdot \delta\mathbf{D})V + \delta\mathbf{D} \cdot \nabla V$, on a :

$$\begin{aligned} \delta W &= \iiint_{\Omega} \nabla \cdot (\delta\mathbf{D}(\mathbf{r})V(\mathbf{r})) d^3\mathbf{r} - \iiint_{\Omega} \delta\mathbf{D}(\mathbf{r}) \nabla V(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} \\ &= \iiint_{\Omega} \nabla \cdot (\delta\mathbf{D}(\mathbf{r})V(\mathbf{r})) d^3\mathbf{r} + \iiint_{\Omega} \delta\mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} \\ &= \underbrace{\oint_{\Sigma} \delta\mathbf{D}(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}) d\mathbf{S}}_0 + \iiint_{\Omega} \delta\mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (82)$$

En effet, quand $r \rightarrow +\infty$, $\delta\mathbf{D}(\mathbf{r})$ décroît en r^{-2} et $V(\mathbf{r})$ décroît en r^{-1} alors que $d\mathbf{S}$ augmente en r^2 , donc l'intégrale de surface est nulle. Si le milieu diélectrique est linéaire, alors :

$$\delta\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} = \varepsilon \delta\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{2} \varepsilon \delta(\mathbf{E}^2) = \frac{1}{2} \delta(\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}). \quad (83)$$

On peut alors écrire :

$$\delta W = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \delta(D(\mathbf{r}) \cdot E(\mathbf{r})) d^3\mathbf{r} = \frac{1}{2} \delta \iiint_{\Omega} D(\mathbf{r}) \cdot E(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}, \quad (84)$$

puis

$$W = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} D(\mathbf{r}) \cdot E(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}. \quad (85)$$

I. Polarisabilité et susceptibilité des liquides et gaz

Un atome ou une molécule placé dans un champ électrique $\mathbf{E}$ se polarise. Le moment dipolaire est donné par :

$$\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}, \quad (86)$$

où α est la polarisabilité. On suppose la particule sphérique de rayon R_0 . Lorsque le champ électrique externe $\mathbf{E}$ n'est pas nul, le centre du nuage électronique n'est plus confondu avec le noyau. Un équilibre est atteint lorsque le champ extérieur exercé sur le noyau est compensé par le champ $\mathbf{E}_e$ généré par le déplacement des électrons. On montre à partir du théorème de GAUSS :

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{E}_e \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qd}{R_0^3}, \quad (87)$$

où q est la charge du noyau ($-q$ celle des électrons) et d est la distance entre les deux centres de charges. Comme le moment dipolaire p est donné par $p = qd$, on peut l'exprimer en fonction du champ externe $\mathbf{E}$ puisqu'à l'équilibre, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_e$:

$$p = 4\pi\epsilon_0 R_0^3 \mathbf{E}_0 \Rightarrow \alpha = 4\pi\epsilon_0 R_0^3. \quad (88)$$

Ce résultat est approximatif et donne une valeur de α quatre fois plus grande que la valeur expérimentale. Pour des molécules de géométrie plus compliquées, la polarisabilité devient tensorielle :

$$p_i = \alpha_{ij} E^j \Leftrightarrow \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{xy} & \alpha_{xz} \\ \alpha_{yx} & \alpha_{yy} & \alpha_{yz} \\ \alpha_{zx} & \alpha_{zy} & \alpha_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E^x \\ E^y \\ E^z \end{pmatrix}. \quad (89)$$

Les molécules sont plus faciles à polariser suivant certains axes. Avec $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}_0$, on peut écrire en première approximation $\mathbf{P} = N\mathbf{p}$ pour N molécules. Dans ce cas :

$$\mathbf{P} = N\alpha \mathbf{E}_0 \Rightarrow \alpha = \frac{\epsilon_0 \chi_e}{N}. \quad (90)$$

Ce qui n'est pas exact non plus. En effet, la polarisation dépend du champ électrique total mais la polarisabilité n'est sensée dépendre que du champ électrique extérieur dû aux autres molécules.

On suppose maintenant que chaque atome est dans une sphère de rayon $R > R_0$, de telle sorte que le volume de toutes les sphères des molécules est égal au volume occupé par ces molécules. Le nombre N de molécules par unité de volume est alors donné par :

$$N = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3}. \quad (91)$$

Le champ total $\mathbf{E}$ est donné par :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{mol}} + \mathbf{E}_{\text{ext}}, \quad (92)$$

où

$$\mathbf{E}_{\text{mol}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}}{R^3}, \quad \mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}_{\text{ext}}. \quad (93)$$

Ainsi

$$\mathbf{E} = \left(1 - \frac{\alpha}{4\pi\epsilon_0 R^3}\right) \mathbf{E}_{\text{ext}}. \quad (94)$$

Avec (91), on obtient une expression pour le champ total indépendante du rayon R :

$$\mathbf{E}_{\text{tot}} = \left(1 - \frac{N\alpha}{3\epsilon_0}\right) \mathbf{E}_{\text{ext}}. \quad (95)$$

Ceci nous permet d'exprimer la polarisation $\mathbf{P}$ en fonction de α :

$$\mathbf{P} = N\alpha \mathbf{E}_{\text{ext}} = \frac{3\epsilon_0 N\alpha}{3\epsilon_0 - N\alpha} \mathbf{E} \quad (96)$$

Finalement, on peut exprimer la susceptibilité en fonction de la polarisabilité :

$$\chi_e = \frac{3N\alpha}{3\epsilon_0 - N\alpha}. \quad (97)$$

En utilisant $\alpha = 4\pi\epsilon_0 R_0^3$, on obtient :

$$\chi_e = \frac{3\beta}{1 - \beta}, \quad (98)$$

où $\beta = \left(\frac{R_0}{R}\right)^3$. Cette approximation n'est valable que si $\beta \ll 1$. Elle n'est donc pas valable pour des liquides ou des solides mais l'est pour les gaz diélectriques car il y a beaucoup d'espace vide entre les atomes ou molécules.. On peut également exprimer la polarisabilité α en fonction de la constante diélectrique K , et on obtient dans ces conditions la formule de CLAUSIUS-MOSSOTTI :

$$\alpha = \frac{3\epsilon_0}{N} \frac{K - 1}{K + 2} \quad (99)$$

Cette expression précise de la polarisabilité est en bon accord avec l'expérience.

II. MILIEUX MAGNÉTIQUES

A. Champ magnétique d'un courant permanent

Le champ magnétique d'un courant permanent représenté par son vecteur densité de courant $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ est donné par la loi de BIOT-SAVART :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} d^3\mathbf{r}' \quad (100)$$

Le champ magnétique a pour unité le tesla (T) dans le système international. On peut aussi utiliser la gauss (1 gauss = 10^{-4} T). Le champ magnétique terrestre à une intensité $B \sim 0.5 \times 10^{-4}$ T ~ 0.5 gauss.

On considère un champ magnétique créé par un courant électrique I permanent dans un fil rectiligne uniforme. Le champ magnétique infinitésimal s'écrit :

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{I} \times \hat{\mathbf{u}}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^2} dr', \quad (101)$$

où $I d\mathbf{l} = \mathbf{I} dr'$. En utilisant le changement de variable $\frac{r'}{r} = \tan(\alpha)$, on a $dr' = \frac{r}{\cos^2(\alpha)}$ donc :

$$\frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^2} = \frac{\cos^2(\alpha)}{r^2}, \quad (102)$$

$$\mathbf{I} \times \hat{\mathbf{u}} = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \hat{\mathbf{k}} = -\cos(\alpha) \hat{\mathbf{k}}.$$

D'où

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi r} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos(\alpha) d\alpha = -\frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\sin(\alpha_2) - \sin(\alpha_1)). \quad (103)$$

Pour un fil infini, on a $\alpha_1 = -\frac{\pi}{2}$ et $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$. Le champ magnétique devient :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\mathbf{k}}. \quad (104)$$

La symétrie cylindrique du fil fait que, d'une manière générale, le champ magnétique s'écrit :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\mathbf{u}}_{\theta}. \quad (105)$$

où $\hat{\mathbf{u}}_{\theta}$ est le vecteur unitaire polaire.

B. Théorème d'AMPÈRE

L'intégrale du champ magnétique sur une courbe fermée $\mathcal{C}$ est donnée par le théorème d'AMPÈRE intégral :

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I. \quad (106)$$

Le théorème d'AMPÈRE local est donné par :

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \iint_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \iint_{\Sigma} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} \Rightarrow \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (107)$$

On retrouve l'équation de MAXWELL-GAUSS. Si plusieurs fils passent à travers le contour $\mathcal{C}$, alors :

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{B}_{\text{tot}} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{\text{tot}}, \quad (108)$$

où $\mathbf{B}_{\text{tot}} = \sum_i \mathbf{B}_i$ et $I_{\text{tot}} = \sum_i I_i$.

C. Divergence et rotationnel du champ magnétique

À partir de la loi de BIOT-SAVART, on calcul la divergence du champ magnétique $\mathbf{B}$:

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} \right) d^3\mathbf{r}' \quad (109)$$

or :

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} \right) = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} \cdot \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}') - \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla \times \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} \right) = 0 \quad (110)$$

donc :

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \quad (111)$$

De même, on calcul le rotationnel du champ magnétique $\mathbf{B}$:

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega} \nabla \times \left(\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} \right) d^3\mathbf{r}' \quad (112)$$

On peut montrer :

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} \right) = 4\pi \mathbf{j}(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' \quad (113)$$

donc :

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}) \quad (114)$$

D. Potentiel vecteur magnétique

En électrostatique, $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$ permet d'écrire $\mathbf{E} = -\nabla V$. De la même manière, en magnétostatique,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (115)$$

nous permet d'écrire :

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (116)$$

où $\mathbf{A}$ est le potentiel vecteur magnétique. On peut écrire :

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (117)$$

On peut ajouter un gradient au potentiel vecteur sans changer le champ magnétique car $\forall \lambda, \nabla \times \nabla \lambda = \mathbf{0}$, et ainsi s'arranger pour que $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Pour cela, on suppose qu'on a d'abord un potentiel vecteur $\mathbf{A}'$ tel que $\nabla \cdot \mathbf{A}' \neq 0$. Dans ce cas, il est possible de choisir un nouveau potentiel vecteur $\mathbf{A}$ tel que $\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \nabla \lambda$, donc $\nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A}' + \nabla^2 \lambda$. Pour que $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, il faut définir λ par $\nabla^2 \lambda = -\nabla \cdot \mathbf{A}'$ (équation de POISSON), c'est à dire :

$$\lambda(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \frac{\nabla \cdot \mathbf{A}'(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} d^3\mathbf{r}'. \quad (118)$$

Ainsi, il est toujours possible, par un choix judicieux, de rendre la divergence de $\mathbf{A}$ nulle. La relation $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ spécifie le rotationnel de $\mathbf{A}$ mais laisse le choix de sa divergence. Prendre $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ est le choix le plus simple. Il s'agit de la *jauge de COULOMB*. Ce choix permet d'écrire $\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r})$, c'est-à-dire :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} d^3\mathbf{r}'. \quad (119)$$

Pour un système à une dimension, cette équation devient :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{\mathbf{I}(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} d\mathbf{r}', \quad (120)$$

où $\mathbf{I}(\mathbf{r}')$ est l'intensité du courant. Pour un système à deux dimensions, on a :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{\Sigma} \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} d^2\mathbf{r}', \quad (121)$$

où $\mathbf{K}(\mathbf{r}')$ est la densité surfacique de courant. Finalement, le champ magnétique et le potentiel vecteur peuvent s'exprimer interdépendamment par :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \text{ et } \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} &\Rightarrow \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} d^3\mathbf{r}', \\ \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \text{ et } \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B} &\Rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\mathbf{B}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} d^3\mathbf{r}'. \end{aligned} \quad (122)$$

E. Développement multipolaire du potentiel vecteur magnétique

Pour calculer approximativement le potentiel vecteur, loin des distributions de courants localisés, on utilise un développement multipolaire du potentiel vecteur comme dans le cas du potentiel électrique :

$$\frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos(\theta)) \quad (123)$$

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{\mathbf{I}(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} d\mathbf{r}' \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \oint_C r'^n P_n(\cos(\theta)) d\mathbf{l}', \end{aligned} \quad (124)$$

où $\mathbf{I} d\mathbf{r}' = I d\mathbf{l}'$. En développant la série entière, on obtient :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\frac{1}{r} \oint_C d\mathbf{l}' + \frac{1}{r^2} \oint_C r' \cos(\theta) d\mathbf{l}' + \frac{1}{r^3} \oint_C r'^2 \left[\frac{3}{2} \cos^2(\theta) - \frac{1}{2} \right] d\mathbf{l}' + \dots \right). \quad (125)$$

Le premier terme correspond au monopôle magnétique, le second au dipôle magnétique, le troisième au quadrupôle magnétique, etc. En magnétisme, le monopôle magnétique est toujours nul :

$$\oint_C d\mathbf{l}' = \mathbf{0}. \quad (126)$$

Nous allons essayer de simplifier l'expression du terme dipolaire magnétique pour déterminer le champ magnétique :

$$\mathbf{A}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \oint_C r' \cos(\theta) d\mathbf{l}' = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \oint_C (\mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{u}}_r) d\mathbf{l}'. \quad (127)$$

Pour ce faire, on utilise :

$$d[(\mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{u}}_r) \mathbf{l}'] = (\hat{\mathbf{u}}_r \cdot d\mathbf{r}') \mathbf{l}' + (\hat{\mathbf{u}}_r \cdot \mathbf{r}') d\mathbf{l}', \quad (128)$$

donc :

$$\oint_C (\hat{\mathbf{u}}_r \cdot d\mathbf{r}') \mathbf{l}' = - \oint_C (\hat{\mathbf{u}}_r \cdot \mathbf{r}') d\mathbf{l}', \quad (129)$$

et avec l'identité (1) :

$$\hat{\mathbf{u}}_r \times \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{r}' \times d\mathbf{l}' = - \oint_{\mathcal{C}} [\mathbf{l}'(\hat{\mathbf{u}}_r \cdot d\mathbf{r}') - d\mathbf{l}'(\hat{\mathbf{u}}_r \cdot \mathbf{r}')] = -2 \oint_{\mathcal{C}} (\mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{u}}_r) d\mathbf{l}'. \quad (130)$$

Cette dernière expression donne la relation :

$$\oint_{\mathcal{C}} (\mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{u}}_r) d\mathbf{l}' = -\frac{1}{2} \hat{\mathbf{u}}_r \times \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{r}' \times d\mathbf{l}'. \quad (131)$$

Il vient alors :

$$\mathbf{A}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \left[-\frac{1}{2} \hat{\mathbf{u}}_r \times \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{r}' \times d\mathbf{l}' \right]. \quad (132)$$

On définit ainsi le moment magnétique dipolaire par $\mathbf{m} = \frac{1}{2} I \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{r}' \times d\mathbf{l}'$ et le potentiel vecteur devient :

$$\mathbf{A}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{u}}_r}{r^2}. \quad (133)$$

Pour une boucle de courant électrique planaire, on a $\frac{1}{2} \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{r}' \times d\mathbf{l}' = \mathbf{S}$ où S est le vecteur surface. Le moment magnétique dipolaire est alors :

$$\mathbf{m} = I\mathbf{S}. \quad (134)$$

F. Potentiel vecteur et champ magnétique d'un dipôle magnétique

Nous allons déterminer le champ magnétique d'un dipôle magnétique. Le potentiel vecteur est donné en coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) par :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{u}}_r}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin(\theta)}{r^2} \hat{\mathbf{u}}_\phi \quad (135)$$

Le champ magnétique est donné par $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, donc avec l'expression du rotationnel, on a :

$$\mathbf{B} = \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin^2(\theta)}{r} \right) \hat{\mathbf{u}}_r - \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin^2(\theta)}{r} \right) \hat{\mathbf{u}}_\theta \quad (136)$$

donc :

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2 \cos(\theta) \hat{\mathbf{u}}_r + \sin(\theta) \hat{\mathbf{u}}_\theta) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} (3(\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{u}}_r) - \mathbf{m}) \quad (137)$$

L'énergie d'interaction entre deux dipôles magnétiques est donnée par :

$$W = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2 - 3(\mathbf{m}_1 \cdot \hat{\mathbf{u}}_r)(\mathbf{m}_2 \cdot \hat{\mathbf{u}}_r)] \quad (138)$$

G. Introduction au magnétisme dans la matière

Tous les champs magnétiques sont dues aux mouvements des charges électriques. L'origine du magnétisme est quantique, mais ici nous allons adopter une version classique du magnétisme. L'examen d'un aimant magnétique montre l'existence de courants électriques dans des boucles infinitésimales : des électrons orbitent autour des noyaux d'atomes et tournent autour de leurs axes. Ces orbites sont microscopiques, on peut par conséquent traiter le magnétisme en utilisant les moments dipolaires magnétiques.

Contrairement à la polarisation $\mathbf{P}$ qui est presque toujours dans le même sens que le champ électrique, certains matériaux développent une aimantation $\mathbf{M}$ dans le même sens que $\mathbf{B}$ (paramagnétiques), d'autre dans le sens inverse (diamagnétiques) et certains matériaux retiennent l'aimantation après suppression du champ magnétique (ferromagnétiques).

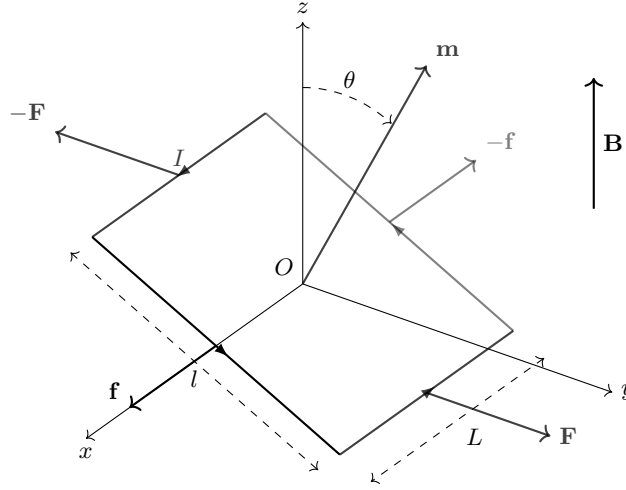


FIGURE 4 – Forces exercées sur une boucle de courant.

H. Forces et moments de forces sur des dipôles magnétiques

Soit un champ magnétique $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{u}}_z$. On note $\mathbf{l}$ (resp. $\mathbf{L}$) les vecteurs déplacement le long des côtés, de taille l (resp. L). On a les forces $\mathbf{f} = I\mathbf{l} \times \mathbf{B}$ et $\mathbf{F} = I\mathbf{L} \times \mathbf{B}$. Le moment de force sur un cadre parcouru par un courant I est :

$$\mathcal{M}_F = \frac{1}{2} \times \mathbf{F} - \frac{1}{2} \times (-\mathbf{F}) = \mathbf{l} \times \mathbf{F} = ILL \sin(\theta) \hat{\mathbf{u}}_x = \mathbf{m} \times \mathbf{B}. \quad (139)$$

où $m = ILL$ est le moment magnétique dipolaire. L'énergie potentielle magnétique du dipôle magnétique à un angle quelconque θ_c est le travail nécessaire pour faire tourner le dipôle depuis sa position d'énergie nulle $\theta = \frac{\pi}{2}$ à cette position ($\theta = \theta_c$) :

$$W = \int_{\pi/2}^{\theta_c} \mathcal{M}_F d\theta = mB \int_{\pi/2}^{\theta_c} \sin(\theta) d\theta = -mB \cos(\theta_c) = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}. \quad (140)$$

Si le champ magnétique est uniforme, la force exercée par celui-ci est :

$$\mathbf{F} = -I \oint_C \mathbf{B} \times d\mathbf{l} = \mathbf{0}. \quad (141)$$

Si le champ magnétique n'est pas uniforme, alors ce dernier obtient une composante radiale variable. On peut montrer que cette force est donnée par :

$$\mathbf{F} = -\nabla W = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}). \quad (142)$$

I. Effet d'un champ magnétique sur des orbitales atomiques

En principe, le mouvement orbital ne constitue pas un courant électrique, mais comme la période de rotation $T = \frac{2\pi r}{v}$ est très petite, ce mouvement constitue un courant permanent d'intensité $i = -\frac{e}{T} = -\frac{ev}{2\pi r}$. Le moment magnétique orbital est donc :

$$\mathbf{m} = i\mathbf{S} = -\frac{1}{2}evr\hat{\mathbf{u}}_z. \quad (143)$$

Lorsqu'on place l'atome dans un champ magnétique $\mathbf{B}$, le dipôle magnétique subit un moment de force $\mathcal{M}_F = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$. Suivant l'orientation de $\mathbf{B}$, l'électron peut accélérer ou décélérer. Si $\mathbf{B} = 0$, alors l'équation du mouvement est :

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = m_e \frac{v^2}{r}. \quad (144)$$

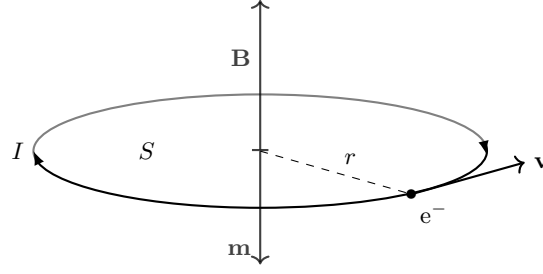


FIGURE 5 – Orbite de l'électron.

Si $\mathbf{B} \neq 0$, on choisit $\mathbf{B} \parallel \hat{\mathbf{u}}_z$ (sinon l'orbite change) et on rajoute la force magnétique $\mathbf{f}_{\text{mag}} = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} + ev'B = m_e \frac{v'^2}{r}. \quad (145)$$

où v' est la nouvelle vitesse de l'électron, telle que la variation de vitesse $\Delta v = v' - v$ soit petite pour que $v' + v \approx 2v \approx 2v'$. Par soustraction des deux équations de mouvement :

$$ev'B = m_e \frac{(v' - v)(v' + v)}{r} \Rightarrow \Delta v = \frac{erB}{2m_e}. \quad (146)$$

En utilisant cette variation de la vitesse, on peut déterminer la variation du moment orbital :

$$\mathbf{m} = -\frac{1}{2}evr\hat{\mathbf{u}}_z \Rightarrow \Delta\mathbf{m} = -\frac{1}{2}er\Delta v\hat{\mathbf{u}}_z = -\frac{e^2r^2}{4m_e}\mathbf{B}. \quad (147)$$

La variation du moment magnétique orbital est opposée au sens du champ magnétique $\mathbf{B}$. Ce phénomène de variation de vitesse est connu sous le nom d'effet ZEEMAN. En présence d'un champ magnétique, chaque moment magnétique orbital varie de $\Delta\mathbf{m}$ en opposition au champ magnétique. C'est le mécanisme responsable du diamagnétisme. Il est très faible et on l'observe seulement dans les matériaux où les atomes ont un nombre pair d'électrons. Ce résultat est vraiment qualitatif car le diamagnétisme est un phénomène quantique.

J. Vecteur aimantation

En présence d'un champ magnétique, la matière devient magnétique. Dans les matériaux paramagnétiques, chaque moment dipolaire s'oriente parallèlement au champ magnétique. Dans les matériaux diamagnétiques, chaque moment dipolaire s'oriente antiparallèlement au champ magnétique. Enfin, dans les matériaux ferromagnétiques, chaque moment dipolaire se comporte comme dans les matériaux paramagnétiques mais l'aimantation persiste après le retrait du champ magnétique extérieur.

Le phénomène d'aimantation est caractérisé par la densité volumique de moments dipolaires ou l'aimantation $\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{m}}{dV}$, avec V le volume et $\mathbf{m} = \sum_i \mathbf{m}_i$ où $\mathbf{m}_i$ est le moment magnétique des particules individuelles.

K. Champ magnétique d'un matériau aimanté

On veut déterminer le potentiel vecteur d'un matériau aimanté. Pour un dipôle magnétique, nous avons vu que le potentiel vecteur est donné par :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{u}}_r}{r^2}. \quad (148)$$

Pour un matériau de vecteur aimantation $\mathbf{M}$, l'élément du potentiel vecteur est donné par :

$$d\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} d^3\mathbf{r}' \Rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} d^3\mathbf{r}'. \quad (149)$$

Une fois que le potentiel vecteur est connu, on peut déterminer le champ magnétique $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Pour une aimantation uniforme $\mathbf{M}$, on obtient :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{M} \times \iiint_{\Omega} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} d^3\mathbf{r}'. \quad (150)$$

L'intégrale représente un champ électrique auxiliaire créé par une charge électrique de charge constante égale à $4\pi\epsilon_0$. Pour calculer le potentiel vecteur, il faut d'abord calculer le champ électrique auxiliaire (par exemple en utilisant un théorème de GAUSS).

L. Aimantation et distribution de courant équivalents

Par analogie avec la polarisation, on montre que le potentiel vecteur produit par l'aimantation $\mathbf{M}$ peut être obtenu par une distribution de courant volumique et surfacique. Avec (5) on peut montrer :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega} \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \left(\nabla' \cdot \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \right) d^3\mathbf{r}' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\iiint_{\Omega} \frac{\nabla \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} d^3\mathbf{r}' + \oint_{\Sigma} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times d\mathbf{S}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\iiint_{\Omega} \frac{\mathbf{J}_l(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} d^3\mathbf{r}' + \oint_{\Sigma} \frac{\mathbf{K}_l(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} d^2\mathbf{r}' \right]. \end{aligned} \quad (151)$$

Le développement est similaire à (38), où $\mathbf{J}_l = \nabla \times \mathbf{M}$ et $\mathbf{K}_l = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{u}}_n$ sont les densités de courants liés volumiques et surfaciques. Il y a analogie parfaite avec le potentiel électrique des diélectriques, avec des densités vectorielles et non scalaires.

On suppose l'existence de la densité de courant volumique et on va montrer que la densité de courant volumique et on va montrer que la densité de courant superficielle $\mathbf{K}_l$ est due à la discontinuité de l'aimantation $\mathbf{M}$ à la surface du milieu magnétique. On note que c'est la composante perpendiculaire à la surface qui varie très rapidement et s'annule à la surface. On suppose que l'axe z du référentiel est perpendiculaire à la surface. Il faut par conséquent ne garder dans le rotationnel de $\mathbf{M}$ que la dérivée partielle suivant z . La densité de courant lié près de la surface peut alors être écrite :

$$\mathbf{J}_l(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} -\partial M_y / \partial z \\ \partial M_x / \partial z \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (152)$$

La densité de courant lié surfacique est obtenue en intégrant $\mathbf{J}_l(\mathbf{r})$ suivant z :

$$\mathbf{K}_l = \int_{-\epsilon}^0 \mathbf{J}_l(\mathbf{r}(z)) dz = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{u}}_n. \quad (153)$$

M. Interprétation des courants liés

Le courant de surface peut être interprété comme étant la somme des courants internes des dipôles magnétiques. Les courants internes s'annulent deux à deux et il ne reste que le courant de surface. Le moment magnétique total est $m = MS\epsilon$, où S est la surface du matériau et ϵ son épaisseur. D'autre part, ce moment est donné par $m = IS$. On en déduit que $I = M\epsilon$. La densité de courant lié est par conséquent donné par $K_l = \frac{I}{\epsilon} = M$.

Pour déterminer le courant de volume, il faut supposer que les courants des dipôles magnétiques sont inhomogènes. La différentielle du courant suivant l'axe x est donné par :

$$dI_x = \frac{\partial M_z}{\partial y} dy dz - \frac{\partial M_y}{\partial z} dy dz = [\nabla \times \mathbf{M}]_x dy dz. \quad (154)$$

On en déduit la densité de courant de volume :

$$\mathbf{J}_l = \nabla \times \mathbf{M}. \quad (155)$$

Ce courant vérifie bien l'équation de continuité $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_l = 0$ car la densité de charge est indépendante du temps et la divergence du rotationnel est toujours nulle.

N. Vecteur champ d'aimantation

L'effet de l'aimantation $\mathbf{M}$ est d'établir des courants de volume $\mathbf{J}_l = \nabla \times \mathbf{M}$ et de surface $\mathbf{K}_l = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{u}}_n$. Le champ magnétique dû à l'aimantation $\mathbf{M}$ est le champ produit par ces courants. Si on ajoute les courants libres $\mathbf{J}_f$, le courant total est donné par :

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_l + \mathbf{J}_f. \quad (156)$$

La loi d'AMPÈRE s'écrit :

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J}_l + \mathbf{J}_f = \nabla \times \mathbf{M} + \mathbf{J}_f \Rightarrow \nabla \times \left[\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \right] = \mathbf{J}_f. \quad (157)$$

On pose alors le vecteur champ d'aimantation $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}$. En terme de ce nouveau vecteur, l'équation d'AMPÈRE devient :

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f. \quad (158)$$

La forme intégrale de la loi d'AMPÈRE est :

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_F, \quad (159)$$

avec $I_f = \iint_{\Sigma} \mathbf{J}_f \cdot d\mathbf{S}$.

O. Milieux aimantés linéaires et non-linéaires

Dans les milieux paramagnétiques et diamagnétiques, l'aimantation s'annule lorsque le champ magnétique s'annule. Dans la plupart des matériaux, l'aimantation est proportionnelle au champ magnétique. On définit la relation constitutive du milieu par la relation :

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}, \quad (160)$$

où χ_m est la susceptibilité magnétique du matériau. De la définition de $\mathbf{H}$, on peut exprimer le champ magnétique par :

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0(1 + \chi_m)\mathbf{H} = \mu_0\mu_r\mathbf{H} = \mu\mathbf{H}, \quad (161)$$

avec $\mu = \mu_0\mu_r = \mu_0(1 + \chi_m)$ la perméabilité magnétique du milieu. Dans les matériaux magnétiques linéaires :

$$\mathbf{J}_l = \nabla \times \mathbf{M} = \nabla \times (\chi_m \mathbf{H}) = \chi_m \mathbf{J}_f. \quad (162)$$

Ainsi, si $\mathbf{J}_f = \mathbf{0}$, alors $\mathbf{J}_l = \mathbf{0}$ donc il ne reste que les courants bornés de surface.

P. Exemples de champ magnétique créé par des corps aimantés

1. Sphère uniformément aimantée

Le vecteur potentiel d'une sphère uniformément aimantée de rayon R est donné par :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{M} \times \iiint_{\Omega} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} d^3\mathbf{r}'. \quad (163)$$

On procède comme pour la sphère uniformément polarisée. On calcul le champ électrique auxiliaire :

— pour $r > R$:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{M} \times \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \frac{\hat{\mathbf{u}}_r}{r^2} \right). \quad (164)$$

On pose $\mathbf{m} = \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)\mathbf{M}$, et on obtient :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin(\theta)}{r^2} \hat{\mathbf{u}}_\varphi. \quad (165)$$

Pour déterminer le champ magnétique, il faut utiliser le rotationnel du vecteur potentiel en coordonnées curvilignes :

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\mu_0 m}{3\pi r^3} [2 \cos(\theta) \hat{\mathbf{u}}_r + \sin(\theta) \hat{\mathbf{u}}_\theta] = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [3(\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{u}}_r) \hat{\mathbf{u}}_r - \mathbf{m}]. \quad (166)$$

— Pour $r < R$:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{M} \times \left(\frac{4}{3}\pi \mathbf{r}\right) = \frac{\mu_0}{3} \mathbf{M} \times \mathbf{r}. \quad (167)$$

Pour déterminer le champ magnétique, on utilise le rotation du vecteur potentiel :

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{2}{3} \mu_0 \mathbf{M}. \quad (168)$$

2. Cylindre de révolution aimanté uniformément selon son axe

On considère un cylindre d'axe $\hat{\mathbf{u}}_z$ de taille l et de rayon R . Pour déterminer le champ magnétique directement, on utilise la loi de BIOT-SAVART :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \frac{\mathbf{K}_l(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} d^2\mathbf{r}' \quad (169)$$

On utilise seulement la surface latérale car le vecteur unitaire $\hat{\mathbf{u}}_n$ est orthogonal à $\mathbf{K}_l$ sur les surfaces de base du cylindre. On peut montrer que le champ magnétique au centre du cylindre est donné par :

$$\mathbf{B} = \mu_0 \sin(\theta_{\max}) \mathbf{M}. \quad (170)$$

Pour un cylindre plat :

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 l}{2R} \mathbf{M}, \quad (171)$$

et pour un cylindre infini :

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{M}. \quad (172)$$

3. Solénoïde infini

On considère un cylindre infini de rayon R entouré par un solénoïde de rayon R_c avec une densité de spires N . On pose $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}$ pour $r < R_c$ et $\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}$ pour $R > r > R_c$. On a :

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_f \Rightarrow H_1 = H_2 = i_f N. \quad (173)$$

avec $I_f = N i_f$. On a donc les champs magnétiques :

$$B_1 = \mu_0(1 + \chi_m) i_f N \text{ et } B_2 = \mu_0 i_f N. \quad (174)$$

Q. Force exercée sur un échantillon diamagnétique ou paramagnétique par un champ magnétique inhomogène

1. Densité volumique de force

On considère un champ magnétique extérieur inhomogène $\mathbf{B}_e$ qui aimante un échantillon magnétique. Chaque moment dipolaire magnétique $\mathbf{m}_i$ est soumis à une force $\mathbf{F}_i$. Cette force est donnée par :

$$\mathbf{F}_i = \nabla(\mathbf{m}_i \cdot \mathbf{B}_e). \quad (175)$$

Les composantes cartésiennes de $\mathbf{F}_i$ sont :

$$F_{i,\alpha} = \mathbf{m}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_e}{\partial \alpha}, \quad \alpha \in \{x, y, z\}. \quad (176)$$

La force totale exercée sur un échantillon de volume $d\tau$ dans chaque direction est donnée par :

$$F_\alpha = \sum_i F_{i,\alpha} = \sum_i \mathbf{m}_i \frac{\partial \mathbf{B}_e}{\partial \alpha} = \mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{B}_e}{\partial \alpha} d\tau, \quad \alpha \in \{x, y, z\}. \quad (177)$$

La densité volumique de force est donnée par :

$$f_\alpha = \mathbf{M} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_e}{\partial \alpha}. \quad (178)$$

Pour un matériau linéaire, $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$. Comme $\chi_m \ll 1$ en général pour les matériaux paramagnétiques et diamagnétiques, on peut approximer cette relation par $\mathbf{M} = \frac{\chi_m}{\mu_0} \mathbf{B}_e$. La densité de force devient :

$$f_\alpha = \frac{\chi_m}{\mu_0} \mathbf{B}_e \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_e}{\partial \alpha} = \frac{\chi_m}{2\mu_0} \frac{\partial \mathbf{B}_e^2}{\partial \alpha} \Rightarrow \mathbf{f} = \frac{\chi_m}{2\mu_0} \nabla(\mathbf{B}_e^2). \quad (179)$$

Pour un matériau diamagnétique, la susceptibilité est négative, par conséquent, il est repoussé de la région où le champ est fort. Pour un échantillon paramagnétique, l'échantillon est attiré vers les champs magnétiques forts.

Si l'échantillon est entre les pôles d'un aimant et qu'il tourne autour de son centre de gravité, il s'oriente perpendiculairement au champ magnétique pour un échantillon diamagnétique, et parallèlement au champ pour un échantillon paramagnétique. Ceci est dû aux moments de forces qui s'appliquent sur les extrémités de l'échantillon.

2. Mesure de susceptibilité

Pour mesurer la susceptibilité, on peut utiliser la méthode de GOUY. On prend un échantillon magnétique cylindrique et on mesure la force appliquée une fois qu'il pénètre entre les deux pôles d'un aimant (posé à l'horizontale selon le plan $(O; x, y)$). Les composantes de forces suivant x et y sont nulles car le champ magnétique est constant, par contre la force suivant z est non nulle et sa densité est donnée par :

$$f_z(z) = \frac{\chi_m}{2\mu_0} \frac{\partial \mathbf{B}_e^2}{\partial z}. \quad (180)$$

Pour calculer la force sur l'échantillon, il faut intégrer cette densité de force :

$$F_z = \iint dx dy \int f_z(z) dz = \frac{\chi_m S}{2\mu_0} \int \frac{\partial (\mathbf{B}_e^2)}{\partial z} dz = \frac{\chi_m S}{2\mu_0} \Delta B_e^2(z). \quad (181)$$

On peut connaître la norme du champ magnétique par d'autres méthodes, donc en connaissant le poids de l'échantillon et sa surface de base, on peut facilement déduire la susceptibilité magnétique du matériau magnétique. Un échantillon paramagnétique s'enfonce et un échantillon diamagnétique est repoussé par le champ magnétique.

R. Matériaux à forte perméabilité

On suppose que l'échantillon est cylindrique, avec $\mathbf{B}_m$ est le champ créé par l'aimantation $\mathbf{M}$. Le champ magnétique total $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{\text{ext}} + \mathbf{B}_m$ est uniforme et parallèle à $\mathbf{M}$ car on néglige les effets de bords. Nous avons $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{\text{ext}} + \mu_0 \mathbf{M}$ d'où $\mu_0 \mathbf{H}_m = \mathbf{B}_m - \mu_0 \mathbf{M} = \mathbf{0}$. $\mathbf{H}$ est uniquement déterminé par les courants extérieurs qui créent $\mathbf{B}_{\text{ext}}$. C'est pour cette raison que les expérimentateurs utilisent $\mathbf{H}$ comme paramètre dans la relation constitutive des matériaux magnétiques. On change $\mathbf{H}$ et on détermine $\mathbf{B}$ en fonction de $\mathbf{H}$.

On considère désormais un tore magnétique de centre O et d'axe z , de rayon moyen R (rayons minimum et maximum a et b) comportant N spires jointives parcourues par un courant I et remplie par un matériau magnétique. Sans le matériau magnétique, les lignes de champ de $\mathbf{B}_{\text{ext}}$ sont des cercles d'axe Oz . Le théorème d'AMPÈRE donne :

$$\oint \mathbf{B}_{\text{ext}} d\mathbf{l} = \mu_0 N I \Rightarrow 2\pi R B_{\text{ext}} = \mu_0 N I \Rightarrow B_{\text{ext}} = \frac{\mu_0 N I}{2\pi R} \quad (182)$$

À l'intérieur du tore, le champ magnétique est nul. L'aimantation à l'intérieur du matériau est $\mathbf{M} = M \hat{\mathbf{u}}_\theta$. On a également :

$$\mathbf{B} = \mu(H) \mathbf{H} \text{ et } \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}_{\text{ext}}}{\mu_0} = \frac{N I}{2\pi R} \hat{\mathbf{u}}_\theta. \quad (183)$$

Le champ magnétique $\mathbf{B}_m$ créé par l'aimantation $\mathbf{M}$ est tel que :

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_m = 0 \text{ et } \nabla \times \mathbf{B}_m = \mu_0 \nabla \times \mathbf{M}. \quad (184)$$

Comme $\nabla \cdot \mathbf{M} = 0$, on a :

$$\mathbf{B}_m = \mu_0 \mathbf{M}. \quad (185)$$

Dans cette géométrie, on a $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 = \frac{\mathbf{B}_{\text{ext}}}{\mu_0}$. On dit que le champ démagnétisant est nul. $\mathbf{H}$ est le paramètre utilisé par les expérimentateurs. La relation constitutive est toujours donnée en fonction de $\mathbf{H}$. On peut exprimer $\mathbf{M}$ et $\mathbf{B}$ en fonction de $\mathbf{H}$.

Pour mesurer l'aimantation induite, on enroule sur le tore une bobine de N_B spires. L'intensité I du solénoïde détermine $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}_{\text{ext}}}{\mu_0} = \frac{N I}{2\pi R} \hat{\mathbf{u}}_\theta. \quad (186)$$

La variation $\delta \mathbf{B}$ du champ magnétique à l'intérieur du matériau à étudier entraîne une variation du flux $\delta \Phi = N_B S \delta B$ à travers la bobine à N_B spires. Il apparaît entre les bornes de la bobine une force électromotrice :

$$e_B = - \frac{d\Phi}{dt}. \quad (187)$$

On peut alors utiliser :

$$\delta \mathbf{B} = \frac{\delta \Phi}{N_B S}, \quad (188)$$

pour ensuite tracer $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H})$.

S. Ferromagnétisme

Le ferromagnétisme correspond à l'aimantation d'un matériau sous l'effet d'un champ magnétique extérieur. Ce matériau garde cette aimantation même après la suppression du champ magnétique extérieur. L'aimantation ferromagnétique est de l'ordre de 10^6 fois plus grande que celle des corps paramagnétiques. La conséquence la plus importante est la modification très importante, de l'ordre de 10^3 du champ magnétique à l'intérieur du matériau.

Pour des cristaux monoatomiques, seuls le fer, le cobalt, le nickel, le gadolinium et le dysprosium sont ferromagnétiques. Certains alliages sont aussi ferromagnétiques. Le gadolinium devient paramagnétique au-delà de $T > 16^\circ \text{C}$ et le dysprosium au-delà de $T > -180^\circ \text{C}$.

1. Courbe de première aimantation

On veut déterminer $\mathbf{M}$ en fonction de $\mathbf{H}$. Pour cela, les conditions initiales sont très importantes. Il faut que l'échantillon soit désaimanté ou n'ait jamais été aimanté. On utilise souvent des échantillons en forme de tore pour éviter les effets de surface. Le champ $\mathbf{H}$ est contrôlé par l'utilisateur à l'aide du courant électrique dans le tore. On obtient d'abord $\mathbf{B}(H)$ puis $M = \frac{B(H)}{\mu_0} - H$. Expérimentalement, l'aimantation croît d'abord linéairement, puis rapidement avant de tendre vers une asymptote M_{sat} . La valeur de saturation dépend de l'état de l'échantillon. En général, on fait varier B_{ext} entre 0 et 1 T.

Matériau	$\mu_0 M_{\text{sat}}/\text{T}$	$T_f/^\circ\text{C}$	$T_p/^\circ\text{C}$
Fer	2.14	1043	1101
Cobalt	1.76	1393	1401
Nickel	0.6	631	650

TABLE I – Exemple de matériaux ferromagnétiques et paramagnétiques.

La susceptibilité magnétique suit la loi de CURIE-WEISS :

$$\chi_m = \frac{C}{T - T_p}, \quad (189)$$

où T_p est la température CURIE paramagnétique, légèrement plus élevée que la température de transition ferromagnétique T_f .

2. Interprétation du ferromagnétisme (P. WEISS, 1907)

On peut découper le matériau en différents domaines de taille variant de 10 à 100 μm , dont l'aimantation pointe dans la même direction dans un domaine. Dit autrement, les dipôles magnétiques d'un domaine sont tous orientés dans la même direction. L'aimantation de chaque domaine est une aimantation spontanée, ainsi sans aimantation, on a $\langle \mathbf{M} \rangle = 0$. Ces domaines sont séparés par des parois où l'aimantation change graduellement. Par exemple, dans une paroi de BLOCH, l'aimantation tourne de π . D'autres angles sont possibles suivant les symétries des matériaux. Le changement de direction de l'aimantation d'un axe difficile à un axe facile est accompagné d'un changement de l'énergie totale du matériau. Cette différence est appelée l'énergie d'anisotropie magnétique et est due au couplage spin-orbite.

Lors de l'application d'un champ croissant, les domaines magnétiques orientés suivant le champ sont énergétiquement favorisés, donc ils croissent tandis que les autres domaines représentent des volumes de plus en plus faible. L'aimantation totale s'effectue par déplacement de parois.

3. Hystérésis

Après aimantation à saturation de l'échantillon, on souhaiterait savoir comment le désaimanter. On peut faire décroître le champ $\mathbf{H}$ et on constate alors que le champ magnétique $\mathbf{B}$ ne décroît pas comme lors de la croissance durant la première aimantation. On parle d'hystérésis. Les valeurs parcourus lors d'une désaimantation sont plus élevées, et l'allure de la courbe est différente de la courbe d'aimantation. Pour diminuer encore l'aimantation, il faut alors inverser le sens de $\mathbf{H}$ en inversant le sens du courant dans le tore. Le champ magnétique s'annule alors pour une valeur $\mathbf{H} = -\mathbf{H}_c$ dit champ coercitif. L'aimantation s'annule pour un champ légèrement plus faible que $\mathbf{H}_c$.

4. Ferromagnétisme doux et durs, cycles d'hystérésis et pertes par hystérésis

Les matériaux ferromagnétiques peuvent être classés comme doux ou durs (aimants permanents). Les matériaux doux sont tels que $H_c < 100 \text{ A.m}^{-1}$ et ont un cycle d'hystérésis étroit comparé aux matériaux durs. Ils ont une grande perméabilité. Les aimantations et désaimantations successives produisent des pertes d'énergie par hystérésis.

Pour effectuer un cycle d'hystérésis, on utilise un courant alternatif dans le tore. Le champ $\mathbf{H}$ varie de $-\mathbf{H}_m$ à $\mathbf{H}_m$. Après un certain nombre de périodes, on obtient $\mathbf{B}$ qui décrit une courbe fermée, symétrique par rapport à l'origine. Cette courbe est appelée cycle d'hystérésis.

La détermination des cycles d'hystérésis permet d'évaluer les pertes énergétiques des matériaux magnétiques soumis à des champs alternatifs. Le générateur qui aimante le matériau lutte contre la force électromotrice d'induction $e_B = -\frac{d\Phi}{dt}$ où Φ est le flux d'induction de $\mathbf{B}$ qui traverse la bobine torique de mesure. Il doit alors fournir un travail :

$$\delta W = -e_B I \delta t = \delta \Phi I. \quad (190)$$

Pour une bobine torique à N spires, on a $\Phi = NBS$ et $H = \frac{NI}{2\pi R}$ d'où :

$$\delta W = 2\pi RSH \delta B = VH \delta B, \quad (191)$$

où $V = 2\pi RS$ est le volume du tore. La perte par cycle et par unité de volume est alors :

$$w_{\text{cycle}} = \frac{1}{V} \iiint \delta W = \oint_C \mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{B} = \oint_C \mu_0 \mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{M}. \quad (192)$$

T. Aspect microscopique du ferromagnétisme

L'aimantation spontanée est due au magnétisme orbital causé par les mouvements des électrons de valence et au magnétisme de spin. Chaque électron se comporte comme un dipôle magnétique ponctuel.

Le magnétisme orbital est en général très faible dans la plupart des matériaux car les liaisons chimiques localisent les fonctions d'ondes électroniques des électrons des bandes de valence et bloquent leurs directions dans l'espace. Le couplage relativiste spin-orbite permet de produire un faible magnétisme orbital.

Pour les métaux de transition, la couche électronique externe 3d est incomplète et est alors en général ferromagnétique. P. WEISS introduit en 1907 la notion phénoménologique de champ moléculaire. C'est un champ magnétique fictif interne proportionnel à l'aimantation $\mathbf{M}$ qui orienterait les dipôles de spins dans la même direction. Les calculs montrent qu'un tel champ magnétique n'existe pas car il doit dépasser les 10^3 T. En 1928, HEISENBERG introduit l'hamiltonien :

$$\hat{H} = - \sum_{i>j} J_{ij} \hat{\mathbf{S}}_i \cdot \hat{\mathbf{S}}_j, \quad (193)$$

où les J_{ij} sont les interactions d'échanges entre les spins des atomes voisins. Ces interactions dépendent des recouvrements des fonctions d'ondes des atomes voisins. J_{ij} est très sensible à la distance entre atomes. Des calculs montrent que la distance entre atomes voisins doit être suffisamment grande pour que $J_{ij} > 0$.

Expérimentalement, entre les premiers voisins, $J_{1,2} > 0$ pour le fer, le cobalt, et le nickel qui sont ferromagnétiques, alors que $J_{1,2} < 0$ pour le chrome et le manganèse qui sont antiferromagnétiques. Pour ces derniers, la distance entre atomes est suffisamment faible pour qu'il y ait superposition des orbitales et donc exclusion des spins d'après le principe de PAULI. Pour ces matériaux, la transition de phase de magnétisme se fait à la température de NÉEL T_N .

III. ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS LA MATIÈRE

A. Equations de MAXWELL dans le vide et la matière

Dans le vide, les équations de MAXWELL peuvent être écrites :

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{aligned} \right| \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (194)$$

où ρ est la densité de charges et $\mathbf{j}$ est la densité de courant. Dans un matériau diélectrique, ces équations peuvent être réécrites avec les vecteurs $\mathbf{D}$ et $\mathbf{H}$:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_f \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{aligned} \right| \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{j}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{aligned} \quad (195)$$

où ρ_f est la densité de charges libres et $\mathbf{j}_f$ est la densité de courants libres. Pour un matériau linéaire, les équations se simplifient telles que :

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho_f}{\varepsilon} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{aligned} \right| \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu \mathbf{j}_f + \mu \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (196)$$

où $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ est la permittivité diélectrique du matériau et $\mu = \mu_0 \mu_r$ est la perméabilité magnétique du matériau. Enfin, on rappelle les conditions aux limites à la surface entre deux matériaux :

$$\oiint_{\Sigma} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_f \Rightarrow \varepsilon_1 E_{1,\perp} = \varepsilon_2 E_{2,\perp}, \quad (197)$$

$$\oiint_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \Rightarrow B_{1,\perp} = B_{2,\perp}, \quad (198)$$

$$\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \Rightarrow E_{1,\parallel} = E_{2,\parallel}, \quad (199)$$

$$\oint_c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_f + \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Sigma} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \Rightarrow \mathbf{H}_{1,\parallel} - \mathbf{H}_{2,\parallel} = \mathbf{K}_f \times \hat{\mathbf{u}}_n \xrightarrow{K_f=0} \frac{B_{1,\parallel}}{\mu_1} = \frac{B_{2,\parallel}}{\mu_2}. \quad (200)$$

B. Équation d'onde

1. Introduction

Dans l'espace et en l'absence de charges et de courants électriques, les équations de MAXWELL s'écrivent :

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{aligned} \right| \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (201)$$

C'est un ensemble d'équations différentielles aux dérivées partielles de premier ordre. On peut les découpler en appliquant le rotationnel à la troisième et à la quatrième équation :

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) &= \nabla \times \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \Rightarrow \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B} \\ &\Rightarrow -\nabla^2 \mathbf{E} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \\ &\Rightarrow \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{E} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (202)$$

De même :

$$\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{B} = \mathbf{0}. \quad (203)$$

Les équations différentielles obtenues sont découplées mais de second ordre. Nous pouvons conclure que dans le vide, les composantes de $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ satisfont à l'équation d'onde classique :

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{f} = \mathbf{0}. \quad (204)$$

C'est l'équation de propagation d'une onde f à la vitesse v . Les ondes électromagnétiques se propagent donc, dans l'espace, avec une vitesse c donnée par :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 299\,792\,458 \text{ m.s}^{-2}. \quad (205)$$

C'est une vitesse exacte, posée par définition. La définition du mètre est fondée sur cette valeur de c . Les deux constantes ε_0 et μ_0 qui apparaissent, respectivement, dans les lois de GAUSS et d'AMPÈRE-MAXWELL, sont mesurées

dans les laboratoires et sont directement reliées à la vitesse de la lumière. Ainsi, on a pu mesurer la vitesse de la lumière indirectement, sans faire une expérience d'optique. Nous pouvons nous rendre compte, aujourd'hui, que la correction de MAXWELL a joué un rôle très important en électromagnétisme et dans le développement de la physique moderne. Sans cette correction, on ne peut obtenir l'équation d'onde.

Dans la matière et en l'absence de charges libres et de courants libres, les équations de MAXWELL s'écrivent :

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{aligned} \right| \left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{aligned} \right. \quad (206)$$

Si le milieu est linéaire (homogène et isotrope), ε et μ ne varient pas en fonction de la position donc $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ et $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ et on peut réécrire les équations précédentes en :

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{aligned} \right| \left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \varepsilon \mu \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{aligned} \right. \quad (207)$$

Ainsi, dans la matière l'onde électromagnétique se propage avec la vitesse

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \mu_0}{\varepsilon \mu}} c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} c = \frac{c}{n}, \quad (208)$$

où on définit l'indice de réfraction $n = \sqrt{\frac{\varepsilon \mu}{\varepsilon_0 \mu_0}} = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$. En principe, l'indice de réfraction change un peu avec la fréquence de la lumière. Ceci donne lieu à la dispersion de la lumière par un prisme, à l'arc-en-ciel, ... Dans la suite, nous allons développer la théorie des ondes électromagnétiques et pouvoir ainsi comprendre la réflexion, la réfraction, l'absorption et la dispersion de la lumière. Ceci permettra de relier la théorie de l'électromagnétisme à l'optique.

2. Cas d'une propagation à une dimension

La forme d'une équation d'onde à une dimension (selon l'axe x) est :

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \quad (209)$$

où v est la vitesse de propagation de l'onde dans le milieu. Il s'agit d'une équation de D'ALEMBERT¹. On peut définir l'opérateur d'alembertien $\square = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{v} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$.

La solution de cette équation d'onde est de la forme $f(x, t) = g(x - vt) = g(y)$. En effet :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}. \quad (210)$$

La fonction $g(y)$ peut être n'importe quoi et est solution de l'équation d'onde tant que $y = x - vt$. Si on pose $y = x - vt = \text{cste}$, un point quelconque A de la fonction d'onde $g(y)$ se déplace à droite avec la vitesse v . En effet, si x augmente, vt augmente de telle sorte que $x - vt$ reste constant. L'équation d'onde admet également une solution $f(x, t) = h(x + vt)$. Une combinaison linéaire de ces deux solutions est une solution de l'équation d'onde :

$$f(x, t) = g(x - vt) + h(x + vt). \quad (211)$$

A l'instant $t = 0$, on a :

$$f(x, 0) = g(x) + h(x), \quad \frac{df}{dt} = -vg'(x) + vh'(x). \quad (212)$$

On a donc la condition suivante :

$$\frac{1}{v} \int_0^x \frac{df}{dt} dx' = -g(x) + h(x), \quad (213)$$

1. La démonstration n'est pas reprise ici.

avec $g(0) = h(0)$. On obtient alors :

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{2} \left(f(x, 0) - \frac{1}{v} \int_0^x \frac{df}{dt} dx' \right), \\ h(x) &= \frac{1}{2} \left(f(x, 0) + \frac{1}{v} \int_0^x \frac{df}{dt} dx' \right). \end{aligned} \quad (214)$$

3. Extension à trois dimensions

L'équation de propagation à trois dimensions est :

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \nabla^2 f = 0. \quad (215)$$

pour f une fonction scalaire. L'opérateur d'alembertien est défini de manière plus générale par $\square = \nabla^2 - \frac{1}{v} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$. Pour un vecteur :

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{v} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \mathbf{0}. \quad (216)$$

4. Ondes sinusoïdales et notation complexe

On considère une onde sinusoïdale de la forme :

$$f(x, t) = A \cos(k(x - vt) + \delta) = A \cos(kx - \omega t + \delta), \quad (217)$$

où A est l'amplitude, k la norme du vecteur d'onde, v la vitesse de propagation, $\omega = kv$ est la pulsation de l'onde et δ la phase à l'origine. On a la relation de dispersion :

$$v = \frac{\omega}{k}. \quad (218)$$

On définit la longueur d'onde par $f(x + \lambda, t) = f(x, t) \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k}$. De même, on définit la période d'oscillations par $f(x, t + T) = f(x, t) \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{kv} = \frac{\lambda}{v}$ et la fréquence associée $\nu = \frac{1}{T} = \frac{v}{\lambda}$. Cette oscillation sinusoïdale se déplace vers la droite. L'oscillation sinusoïdale se déplaçant vers la gauche est donnée par :

$$f(x, t) = A \cos(kx + \omega t - \delta). \quad (219)$$

Si on compare avec la fonction d'onde se déplaçant vers la droite, on s'aperçoit qu'on a juste changé k en $-k$ dans sa fonction d'onde, d'où le nom de vecteur d'onde, définissant la direction dans laquelle se propage l'onde.

On peut associer à cette onde sinusoïdale réelle une onde complexe :

$$\underline{f}(x, t) = \underline{A} e^{i(kx - \omega t)}, \quad (220)$$

où $\underline{A} = A e^{i\delta}$ est l'amplitude complexe. On peut alors retrouver l'onde réelle avec :

$$f(x, t) = \text{Re} \{ \underline{f}(x, t) \}. \quad (221)$$

Toute combinaison linéaire de fonctions sinusoïdales est une solution de l'équation d'onde :

$$f(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{A}(k) e^{i(kx - \omega t)} dk. \quad (222)$$

Toute fonction d'onde peut s'écrire comme une combinaison linéaire de fonctions sinusoïdales (elles forment une base de fonctions).

5. Polarisation

Le mouvement d'une onde sur une corde est transversal, l'onde dans un ressort est longitudinale et l'onde de son est également longitudinale. Pour les ondes transversales, il y a deux directions de mouvement, perpendiculaires à la direction de propagation. Le mouvement d'une corde du bas vers le haut constitue la polarisation verticale et le mouvement de gauche à droite constitue la polarisation horizontale.

On considère une propagation selon $\hat{\mathbf{u}}_x$. Toutes les autres directions peuvent être représentées par le vecteur $\hat{\mathbf{u}}_n = \cos(\theta)\hat{\mathbf{u}}_y + \sin(\theta)\hat{\mathbf{u}}_z$ appelé le vecteur de polarisation, où θ est l'angle de polarisation. Ce vecteur définit le plan de vibration et est perpendiculaire à la direction de propagation. La fonction d'onde est alors donnée par :

$$\underline{\mathbf{f}}(x, t) = \underline{A}e^{i(kx - \omega t)}\hat{\mathbf{u}}_n = \underline{A}\cos(\theta)e^{i(kx - \omega t)}\hat{\mathbf{u}}_y + \underline{A}\sin(\theta)e^{i(kx - \omega t)}\hat{\mathbf{u}}_z \quad (223)$$

L'onde peut donc être décrite comme superposition d'une onde verticale et d'une onde horizontale.

On décrit en général la polarisation dans le plan $x = 0$:

$$E_y(0, t) = E_{y,0} \cos(\omega t - \varphi_1), \quad E_z(0, t) = E_{z,0} \cos(\omega t - \varphi_2). \quad (224)$$

La pointe du champ électrique $\mathbf{E} = E_y\hat{\mathbf{u}}_y + E_z\hat{\mathbf{u}}_z$ décrit une courbe dans le plan Oyz . Plusieurs polarisations sont possibles selon la valeur de $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$:

- si $\Delta\varphi \equiv 0 \pmod{\pi}$, alors le champ $\mathbf{E}$ garde une direction fixe et l'onde est polarisée rectilignement suivant la direction donnée par le vecteur $\mathbf{E}$;
- sinon on peut écrire à partir de (224) :

$$\left(\frac{E_y}{E_{y,0}}\right)^2 + \left(\frac{E_z}{E_{z,0}}\right)^2 - 2\frac{E_y}{E_{y,0}}\frac{E_z}{E_{z,0}}\cos(\varphi) = \sin^2(\varphi). \quad (225)$$

C'est l'équation d'une ellipse et la polarisation de l'onde est dite elliptique. La polarisation est dite droite ou gauche selon le sens de rotation, déterminé à partir la dérivée de $E_z(0, t = 0)$.

$$\frac{dE_z}{dt} = E_{z,0}\omega \sin(\varphi) \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq \varphi \leq \pi. \quad (226)$$

Dans ce cas là, à $t = 0$ E_y est maximal et, quand E_y diminue, E_z augmente. C'est le cas d'une polarisation droite. A l'inverse, si $\pi < \varphi < 2\pi$, à $t = 0$ E_y est maximal et, quand E_y diminue, E_z diminue. C'est le cas d'une polarisation gauche.

- le cas $\Delta\phi \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ est particulier :

$$\left(\frac{E_x}{E_{x,0}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{y,0}}\right)^2 = 1. \quad (227)$$

C'est l'équation d'un cercle et la polarisation de l'onde est circulaire (gauche ou droite de la même manière).

6. Polariseur

Le polariseur est un instrument d'optique permettant d'absorber une des composante du vecteur champ électrique et laisse passer l'autre composante. Ainsi, une lumière non polarisée en entrée du polariseur sera polarisée rectilignement selon l'axe du polariseur en sortie. Si la lumière entrante est polarisée rectilignement avec une intensité I_0 , avec un angle α entre l'axe de polarisation et l'axe du polariseur (ou analyseur), alors l'intensité en sortie sera donnée par la loi de MALUS :

$$I = I_0 t \cos^2(\alpha), \quad (228)$$

où t est le coefficient de transition de la lame.

7. lame à retard

Une lame à retard est constitué d'un matériau (cristal) biréfringente anisotrope dont l'indice de réfraction dépend de la direction. On appelle axe lent et axe rapide les axes suivant lesquelles $n = n_l$ est maximal et $n = n_r$ est minimal.

Avec $\Delta n = n_l - n_r$, pour une onde de pulsation ω , la différence de phase induite entre les composantes rapide et lente de l'onde sont :

$$\Delta\phi = \frac{\omega L}{c} \Delta n, \quad (229)$$

où L est l'épaisseur du matériau traversée. On distingue les lames demi-onde où $\Delta\phi = \pi$ et les lames quart-d'onde où $\Delta\phi = \frac{\pi}{2}$.

Lame demi-onde. On considère une onde polarisée rectilignement. L'axe de polarisation forme un angle θ par rapport à l'axe lent ($\hat{\mathbf{u}}_x$). L'onde en sortie est alors décrite par :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E_0 \cos(\theta) \cos(\omega t) \hat{\mathbf{u}}_x + E_0 \sin(\theta) \sin(\omega t + \Delta\phi) \hat{\mathbf{u}}_y \\ &= E_0 \cos(\theta) \cos(\omega t) \hat{\mathbf{u}}_x + E_0 \sin(\theta) \sin(\omega t + \pi) \hat{\mathbf{u}}_y \\ &= E_0 \cos(\theta) \cos(\omega t) \hat{\mathbf{u}}_x - E_0 \sin(\theta) \sin(\omega t) \hat{\mathbf{u}}_y. \end{aligned} \quad (230)$$

Cela correspond à une onde polarisée rectilignement avec un angle $-\theta$ par rapport à l'axe lent. La lame demi-onde fait donc tourner le plan de polarisation d'un angle 2θ .

Lame quart-onde. On considère une onde polarisée rectilignement. L'axe de polarisation forme un angle θ par rapport à l'axe lent ($\hat{\mathbf{u}}_x$). L'onde en sortie est alors décrite par :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E_0 \cos(\theta) \cos(\omega t) \hat{\mathbf{u}}_x + E_0 \sin(\theta) \sin(\omega t + \Delta\phi) \hat{\mathbf{u}}_y \\ &= E_0 \cos(\theta) \cos(\omega t) \hat{\mathbf{u}}_x + E_0 \sin(\theta) \sin(\omega t + \pi/2) \hat{\mathbf{u}}_y \\ &= E_0 \cos(\theta) \cos(\omega t) \hat{\mathbf{u}}_x + E_0 \sin(\theta) \cos(\omega t) \hat{\mathbf{u}}_y. \end{aligned} \quad (231)$$

Cela correspond à une onde avec une polarisation elliptique. Si $\theta \equiv \frac{\pi}{4} \pmod{\pi}$, la polarisation est alors circulaire.

8. Conditions aux limites, réflexion et transmission

A la limite d'une corde ($x = 0$), on attache une deuxième corde de façon à ce que seule la densité linéique de masse μ change d'une corde à l'autre et que la tension $\mathbf{T}$ reste la même dans les deux cordes. Soit $f_I(x, t) = \underline{A}_I e^{i(k_1 x - \omega t)}$, la fonction d'onde incidente dans la première corde. On ignore la polarisation de l'onde pour le moment. La vitesse de propagation de l'onde dans les deux cordes sera différentes :

$$v_1 = \sqrt{\frac{T}{\mu_1}} \text{ et } v_2 = \sqrt{\frac{T}{\mu_2}}. \quad (232)$$

On s'attend qu'à la limite de la première corde, l'onde incidente soit partiellement transmise et partiellement réfléchi. Les formes de ses deux ondes sont données par :

$$\begin{aligned} f_R(x, t) &= \underline{A}_R e^{i(-k_1 x - \omega t)}, \\ f_T(x, t) &= \underline{A}_T e^{i(k_2 x - \omega t)}. \end{aligned} \quad (233)$$

L'onde incidente s'étend de $x = -\infty$ à $x = 0$ et l'onde transmise de $x = 0$ à $x = +\infty$. Les deux vitesses sont différentes dans les deux cordes :

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{k_2}{k_1}. \quad (234)$$

Pour une onde sinusoïdale, la fonction d'onde complète est donnée par :

$$f(x, t) = \begin{cases} f_-(x, t) = \underline{A}_I e^{i(k_1 x - \omega t)} + \underline{A}_R e^{i(-k_1 x - \omega t)} & \text{si } x \leq 0, \\ f_+(x, t) = \underline{A}_T e^{i(k_2 x - \omega t)} & \text{si } x \geq 0. \end{cases} \quad (235)$$

A $x = 0$, la fonction d'onde doit être continue et dérivable. On obtient donc les conditions :

$$\begin{cases} f_-(0, t) = f_+(0, t) \\ \frac{\partial f_-}{\partial x} = \frac{\partial f_+}{\partial x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{A}_I + \underline{A}_R = \underline{A}_T \\ (\underline{A}_I - \underline{A}_R)k_1 = \underline{A}_T k_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{A}_T = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} \underline{A}_I \\ \underline{A}_R = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \underline{A}_I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_T = \frac{2v_2}{v_1 + v_2} e^{i(\delta_I - \delta_T)} A_I \\ A_R = \frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2} e^{i(\delta_I - \delta_R)} A_I \end{cases} \quad (236)$$

Si $\mu_2 < \mu_1$ alors $v_2 > v_1$ et $\frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2} > 0$ donc $\delta_R = \delta_T = \delta_I$. A l'inverse, si $\mu_2 > \mu_1$ alors $v_2 < v_1$ et $\frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2} < 0$ donc $\delta_R = \delta_I + \pi$ et $\delta_T = \delta_I$. Enfin, si $\mu_2 \gg \mu_1$, alors $v_2 \approx 0$. L'onde ne se propage pas dans le milieu 2 donc est totalement réfléchi, soit $A_R = A_I$ et $A_T = 0$.

C. Ondes électromagnétiques dans les diélectriques

1. Ondes électromagnétiques dans le vide

Les champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ dans le vide obéissent à l'équation d'onde classique caractérisée par la vitesse de la lumière c . Les ondes $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ sont des ondes planes monochromatiques. Planes car $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ sont dans le même plan, monochromatiques car l'onde correspond à une même couleur donc même longueur d'onde. Les équations de MAXWELL donnent :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow E_{x,0} = B_{x,0}. \quad (237)$$

Les ondes électromagnétiques sont transversales. La loi de FARADAY montre qu'il y a une relation entre $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Rightarrow \mathbf{B}_0 = \frac{1}{c} (\hat{\mathbf{u}}_x \times \mathbf{E}_0). \quad (238)$$

Par convention, l'onde électromagnétique est polarisée suivant la direction de $\mathbf{E}$. D'une manière générale, une onde plane monochromatique se propageant suivant la direction $\mathbf{r}$, de vecteur d'onde $\mathbf{k}$ et polarisée suivant la direction $\hat{\mathbf{u}}_n$ s'écrit :

$$\mathbf{E} = \underline{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \hat{\mathbf{u}}_n, \quad \mathbf{B} = \frac{1}{c} \underline{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \frac{\mathbf{k}}{\|\mathbf{k}\|} \times \hat{\mathbf{u}}_n. \quad (239)$$

2. Énergie, quantité de mouvement et vecteur de POYNTING d'une onde plane monochromatique

L'énergie par unité de volume emmagasinée par une onde électromagnétique dans le vide est :

$$w_{EM} = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2 \right). \quad (240)$$

Or, pour une onde électromagnétique, $\mathbf{B}^2 = \frac{\mathbf{E}^2}{c^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \mathbf{E}^2$, d'où :

$$w_{EM} = \varepsilon_0 \mathbf{E}^2 = \varepsilon_0 |\underline{E}_0|^2 \cos^2(kx - \omega t + \delta). \quad (241)$$

La densité du flux d'énergie est donnée par le vecteur de POYNTING :

$$\mathbf{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}). \quad (242)$$

Pour une onde polarisée suivant l'axe y :

$$\mathbf{\Pi} = \frac{|\underline{E}_0|^2 \cos^2(kx - \omega t + \delta)}{\mu_0 c} = c w_{EM} \hat{\mathbf{u}}_x. \quad (243)$$

L'énergie dans un volume $\Delta V = \Delta S c \Delta t$ est donnée par :

$$W = w_{EM} \Delta V = w_{EM} \Delta S c \Delta t, \quad (244)$$

et l'énergie par unité de surface et de temps est donnée par :

$$\frac{W}{\Delta S \Delta t} = c w_{EM} = \Pi. \quad (245)$$

Le champ électromagnétique transporte également de la densité de quantité de mouvement :

$$\mathbf{p}_{EM} = \frac{1}{c^2} \mathbf{\Pi}. \quad (246)$$

Pour une onde plane monochromatique, cette densité de quantité de mouvement devient :

$$\mathbf{p}_{EM} = \frac{1}{c} w_{EM} \hat{\mathbf{u}}_x \Rightarrow w_{EM} = p_{EM} c. \quad (247)$$

On retrouve la définition de l'énergie d'un photon. Une onde plane monochromatique dans le visible se propageant à la vitesse c a une longueur d'onde très petite et une fréquence très élevée. On détermine alors souvent la valeur moyennée de w_{EM} , $\mathbf{\Pi}$ et $\mathbf{p}_{EM}$ sur une période :

$$\langle w_{EM} \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 |\underline{E}_0|^2, \quad \langle \mathbf{\Pi} \rangle = c \langle w_{EM} \rangle \hat{\mathbf{u}}_x, \quad \langle p_{EM} \rangle = \frac{1}{c} \langle w_{EM} \rangle \hat{\mathbf{u}}_x. \quad (248)$$

Finalement, l'intensité lumineuse $I = \langle \Pi \rangle$ est la puissance par unité de surface et de temps.

3. Propagation d'une onde électromagnétique dans les matériaux linéaires

On considère un matériau linéaire sans charges et courants libres. La vitesse de propagation de l'onde plane monochromatique est :

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \equiv \frac{c}{n}, \quad (249)$$

où $n \equiv \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} > 1$ est l'indice optique du milieu. Dans ce cas, la densité d'énergie, le vecteur de POYNTING et l'intensité lumineuse deviennent :

$$w_{\text{EM}} = \frac{1}{2} \left(\varepsilon \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu} \mathbf{B}^2 \right), \quad \mathbf{\Pi} = \frac{1}{\mu} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}), \quad I = \frac{1}{2} \varepsilon v |\underline{E}_0|^2. \quad (250)$$

À l'interface entre deux matériaux linéaires 1 et 2, on a les relations entre les champs $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{B}_1$ et $\mathbf{B}_2$:

$$\varepsilon_1 \mathbf{E}_{1,\perp} = \varepsilon_2 \mathbf{E}_{2,\perp}, \quad \mathbf{E}_{1,\parallel} = \mathbf{E}_{2,\parallel}, \quad \mathbf{B}_{1,\perp} = \mathbf{B}_{2,\perp}, \quad \frac{1}{\mu_1} \mathbf{B}_{1,\parallel} = \frac{1}{\mu_2} \mathbf{B}_{2,\parallel}. \quad (251)$$

Ces conditions relient les champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ de part et d'autre de l'interface. On s'attend alors à ce qu'une partie de l'onde incidente soit réfléchie et une autre transmise comme dans le cas des deux cordes.

4. Réfraction et transmission à incidence normale

Soit deux matériaux séparés par une interface portée par le plan Oyz en $x = 0$, tels que la vitesse de propagation d'une onde soit v_1 quand $x < 0$ et v_2 quand $x > 0$. On a alors une relation de dispersion pour chaque matériau donnant accès aux normes du vecteur d'onde $k_1 = \frac{\omega}{v_1}$ et $k_2 = \frac{\omega}{v_2}$. Chaque matériau a également son propre indice de réfraction n_1 et n_2 . On a alors deux relations de dispersion $v_1 = \frac{\omega}{k_1}$ et $v_2 = \frac{\omega}{k_2}$. L'onde incidente est donnée par :

$$\begin{cases} \mathbf{E}_I(x, t) = \underline{E}_{0,I} e^{i(k_1 x - \omega t)} \hat{\mathbf{u}}_y \\ \mathbf{B}_I(x, t) = \frac{1}{v_1} \underline{E}_{0,I} e^{i(k_1 x - \omega t)} \hat{\mathbf{u}}_z \end{cases} \quad (252)$$

De la même manière, les ondes réfléchies et transmises sont données, en général, par :

$$\begin{cases} \mathbf{E}_R(x, t) = \underline{E}_{0,R} e^{-i(k_1 x + \omega t)} \hat{\mathbf{u}}_y \\ \mathbf{B}_R(x, t) = -\frac{1}{v_1} \underline{E}_{0,R} e^{-i(k_1 x + \omega t)} \hat{\mathbf{u}}_z \end{cases}, \quad \begin{cases} \mathbf{E}_T(x, t) = \underline{E}_{0,T} e^{i(k_2 x - \omega t)} \hat{\mathbf{u}}_y \\ \mathbf{B}_T(x, t) = \frac{1}{v_2} \underline{E}_{0,T} e^{i(k_2 x - \omega t)} \hat{\mathbf{u}}_z \end{cases} \quad (253)$$

On utilise alors les conditions de continuité à l'interface pour $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ pour obtenir :

$$\begin{cases} \underline{E}_{0,I} + \underline{E}_{0,R} = \underline{E}_{0,T} \\ \frac{1}{\mu_1 v_1} (\underline{E}_{0,I} - \underline{E}_{0,R}) = \frac{1}{\mu_2 v_2} \underline{E}_{0,T} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{E}_{0,T} = \frac{2}{1+\gamma} \underline{E}_{0,I} \\ \underline{E}_{0,R} = \frac{1-\gamma}{1+\gamma} \underline{E}_{0,I} \end{cases}, \quad \gamma = \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2}. \quad (254)$$

Si $\mu_1 \approx \mu_2$, alors les résultats précédents sont applicables. Les amplitudes réelles sont données par :

$$\begin{cases} E_{0,T} = \frac{2}{1+\gamma} E_{0,I} \underset{\mu_1 \approx \mu_2}{=} \frac{2v_2}{v_1+v_2} E_{0,I} = \frac{2n_1}{n_1+n_2} E_{0,I} \\ E_{0,R} = \left| \frac{1-\gamma}{1+\gamma} \right| E_{0,I} \underset{\mu_1 \approx \mu_2}{=} \left| \frac{v_2-v_1}{v_1+v_2} \right| E_{0,I} = \left| \frac{n_2-n_1}{n_1+n_2} \right| E_{0,I} \end{cases} \quad (255)$$

On peut déterminer la fraction d'intensité réfléchie et la fraction d'intensité transmise en sachant que $I = \frac{1}{2} \varepsilon v |\underline{E}_0|^2$. Pour cela, on définit les coefficients de transmission T et de réflexion R :

$$\begin{cases} T = \frac{I_T}{I_I} = \frac{\varepsilon_2 v_2}{\varepsilon_1 v_1} \left(\frac{E_{0,T}}{E_{0,I}} \right)^2 = \frac{\varepsilon_2 v_2}{\varepsilon_1 v_1} \left(\frac{2}{1+\gamma} \right)^2 \underset{\mu_1 \approx \mu_2}{=} \frac{\varepsilon_2 v_2}{\varepsilon_1 v_1} \left(\frac{2n_1}{n_1+n_2} \right)^2 \\ R = \frac{I_R}{I_I} = \left(\frac{E_{0,R}}{E_{0,I}} \right)^2 = \left(\frac{1-\gamma}{1+\gamma} \right)^2 \underset{\mu_1 \approx \mu_2}{=} \left(\frac{n_1-n_2}{n_1+n_2} \right)^2 \end{cases} \quad (256)$$

Sans phénomène d'absorption de la lumière, on a $R + T = 1$.

5. Réflexion et transmission d'une onde électromagnétique à incidence oblique

On reprend le cas précédent dans une situation plus général où la direction de propagation de l'onde électromagnétique est oblique par rapport à l'interface avec un angle θ_I . Les ondes réfléchies et transmises ont également respectivement un angle θ_R et θ_T . L'onde incidente est généralement donnée par :

$$\begin{cases} \mathbf{E}_I(\mathbf{r}, t) = \underline{\mathbf{E}}_{0,I} e^{i(\mathbf{k}_I \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \\ \mathbf{B}_I(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{v_1} \frac{\mathbf{k}_I}{\|\mathbf{k}_I\|} \times \mathbf{E}_I(\mathbf{r}, t) \end{cases} \quad (257)$$

Les ondes réfléchies et transmises suivent directement avec :

$$\begin{cases} \mathbf{E}_R(\mathbf{r}, t) = \underline{\mathbf{E}}_{0,R} e^{i(\mathbf{k}_R \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \\ \mathbf{B}_R(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{v_1} \frac{\mathbf{k}_R}{\|\mathbf{k}_R\|} \times \mathbf{E}_R(\mathbf{r}, t) \end{cases}, \quad \begin{cases} \mathbf{E}_T(\mathbf{r}, t) = \underline{\mathbf{E}}_{0,T} e^{i(\mathbf{k}_T \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \\ \mathbf{B}_T(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{v_2} \frac{\mathbf{k}_T}{\|\mathbf{k}_T\|} \times \mathbf{E}_T(\mathbf{r}, t) \end{cases} \quad (258)$$

À partir des relations de dispersion, on peut relier les différents modules des vecteurs d'onde :

$$\omega = k_I v_1 = k_R v_1 = k_T v_2 \Rightarrow k_I = k_R = \frac{v_2}{v_1} k_T = \frac{n_1}{n_2} k_T. \quad (259)$$

Les conditions aux limites doivent être établies pour tout point $\mathbf{r}$ de l'interface ($x = 0$). Pour cela, il faut vérifier les conditions :

$$k_i \cdot \mathbf{r} = k_r \cdot \mathbf{r} = k_t \cdot \mathbf{r} \quad \text{avec} \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} x = 0 \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (260)$$

On obtient donc :

$$\forall (y, z) \in \mathbb{R}^2, \quad k_{I,y}y + k_{I,z}z = k_{R,y}y + k_{R,z}z = k_{T,y}y + k_{T,z}z \Rightarrow \begin{cases} k_{I,y} = k_{R,y} = k_{T,y} \\ k_{I,z} = k_{R,z} = k_{T,z} \end{cases}. \quad (261)$$

Ainsi, les vecteurs $\mathbf{k}_I$, $\mathbf{k}_R$ et $\mathbf{k}_T$ sont coplanaires. On peut donc choisir le plan (x, y) tels que les trois vecteurs soient contenus dans ce plan, et donc que $k_{I,y} = k_{R,y} = k_{T,y}$ et $k_{I,z} = k_{R,z} = k_{T,z} = 0$. Par conséquent, on peut écrire :

$$k_I \sin(\theta_I) = k_R \sin(\theta_R) = k_T \sin(\theta_T), \quad (262)$$

or, comme $k_I = k_R$, on a alors la loi de réflexion :

$$\theta_I = \theta_R \quad (263)$$

Avec les relations de dispersion, on obtient également la loi de SNELL-DESCARTES :

$$n_1 \sin(\theta_I) = n_2 \sin(\theta_T) \quad (264)$$

On obtient alors les lois fondamentales de l'optique géométrique.

Les facteurs exponentiels sont égaux et les conditions aux limites deviennent plus simples :

$$\begin{array}{l|l} \varepsilon_1(\mathbf{E}_{0,I} + \mathbf{E}_{0,R}) \cdot \hat{\mathbf{u}}_x = \varepsilon_2 \mathbf{E}_{0,T} \cdot \hat{\mathbf{u}}_x & (\mathbf{B}_{0,I} + \mathbf{B}_{0,R}) \cdot \hat{\mathbf{u}}_x = \mathbf{B}_{0,T} \cdot \hat{\mathbf{u}}_x \\ (\mathbf{E}_{0,I} + \mathbf{E}_{0,R}) \cdot \hat{\mathbf{u}}_y = \mathbf{E}_{0,T} \cdot \hat{\mathbf{u}}_y & \mu_2(\mathbf{B}_{0,I} + \mathbf{B}_{0,R}) \cdot \hat{\mathbf{u}}_y = \mu_1 \mathbf{B}_{0,T} \cdot \hat{\mathbf{u}}_y \\ (\mathbf{E}_{0,I} + \mathbf{E}_{0,R}) \cdot \hat{\mathbf{u}}_z = \mathbf{E}_{0,T} \cdot \hat{\mathbf{u}}_z & \mu_2(\mathbf{B}_{0,I} + \mathbf{B}_{0,R}) \cdot \hat{\mathbf{u}}_z = \mu_1 \mathbf{B}_{0,T} \cdot \hat{\mathbf{u}}_z \end{array} \quad (265)$$

Si la polarisation de l'onde incidente est parallèle au plan d'incidence, alors les équations de continuité donnent :

$$\begin{cases} \varepsilon_1(-E_{0,I} \sin(\theta_I) + E_{0,R} \sin(\theta_R)) = -\varepsilon_2 E_{0,T} \sin(\theta_T) \\ E_{0,I} \cos(\theta_I) + E_{0,R} \cos(\theta_R) = E_{0,T} \cos(\theta_T) \\ \frac{1}{\mu_1 v_1}(E_{0,I} - E_{0,R}) = \frac{1}{\mu_2 v_2} E_{0,T} \end{cases}. \quad (266)$$

En regroupant les deux dernières équations, on obtient :

$$\begin{cases} E_{0,I} + E_{0,R} = \alpha E_{0,T} \\ E_{0,I} - E_{0,R} = \gamma E_{0,T} \end{cases}, \quad (267)$$

où $\alpha = \frac{\cos(\theta_T)}{\cos(\theta_I)}$ et $\gamma = \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2} = \frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1}$. Ceci permet alors d'obtenir les équations de FRESNEL :

$$E_{0,R} = \frac{\alpha - \gamma}{\alpha + \gamma} E_{0,I} \text{ et } E_{0,T} = \frac{2}{\alpha + \gamma} E_{0,I}. \quad (268)$$

L'onde transmise est toujours en phase avec l'onde incidente, par contre, l'onde réfléchie est en opposition de phase quand $\alpha < \gamma$. On peut écrire :

$$\alpha = \frac{\sqrt{1 - \sin^2(\theta_T)}}{\cos(\theta_I)} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2(\theta_I)}}{\cos(\theta_I)}. \quad (269)$$

A incidence normale, $\theta_I = 0$ et $\alpha = 1$. On retrouve les résultats précédents. Si $\theta_I = \frac{\pi}{2}$, alors $\alpha \rightarrow +\infty$ et l'onde est complètement réfléchie.

La réflexion nulle se produit quand l'angle d'incidence est égal à l'angle de BREWSTER θ_B , correspondant au cas où $\alpha = \gamma$. Ainsi, si $\mu_1 = \mu_2$:

$$\tan(\theta_B) = \frac{n_2}{n_1}. \quad (270)$$

La puissance de la radiation à l'interface est $\mathbf{\Pi} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n$, donc les intensités $\langle \mathbf{\Pi} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n \rangle$ des ondes incidente, réfléchie et transmises sont :

$$\begin{cases} I_I = \frac{1}{2} \varepsilon_1 v_1 E_{0,I}^2 \cos(\theta_I) \\ I_R = \frac{1}{2} \varepsilon_1 v_1 E_{0,R}^2 \cos(\theta_R) \\ I_T = \frac{1}{2} \varepsilon_2 v_2 E_{0,T}^2 \cos(\theta_T) \end{cases} \quad (271)$$

Finalement, les coefficients de réflexion et transmission en puissance sont donc :

$$\begin{aligned} R &= \frac{I_R}{I_I} = \left(\frac{\alpha - \gamma}{\alpha + \gamma} \right)^2 \\ T &= \frac{I_T}{I_I} = \alpha \gamma \left(\frac{2}{\alpha + \gamma} \right)^2 \end{aligned} \quad (272)$$